Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

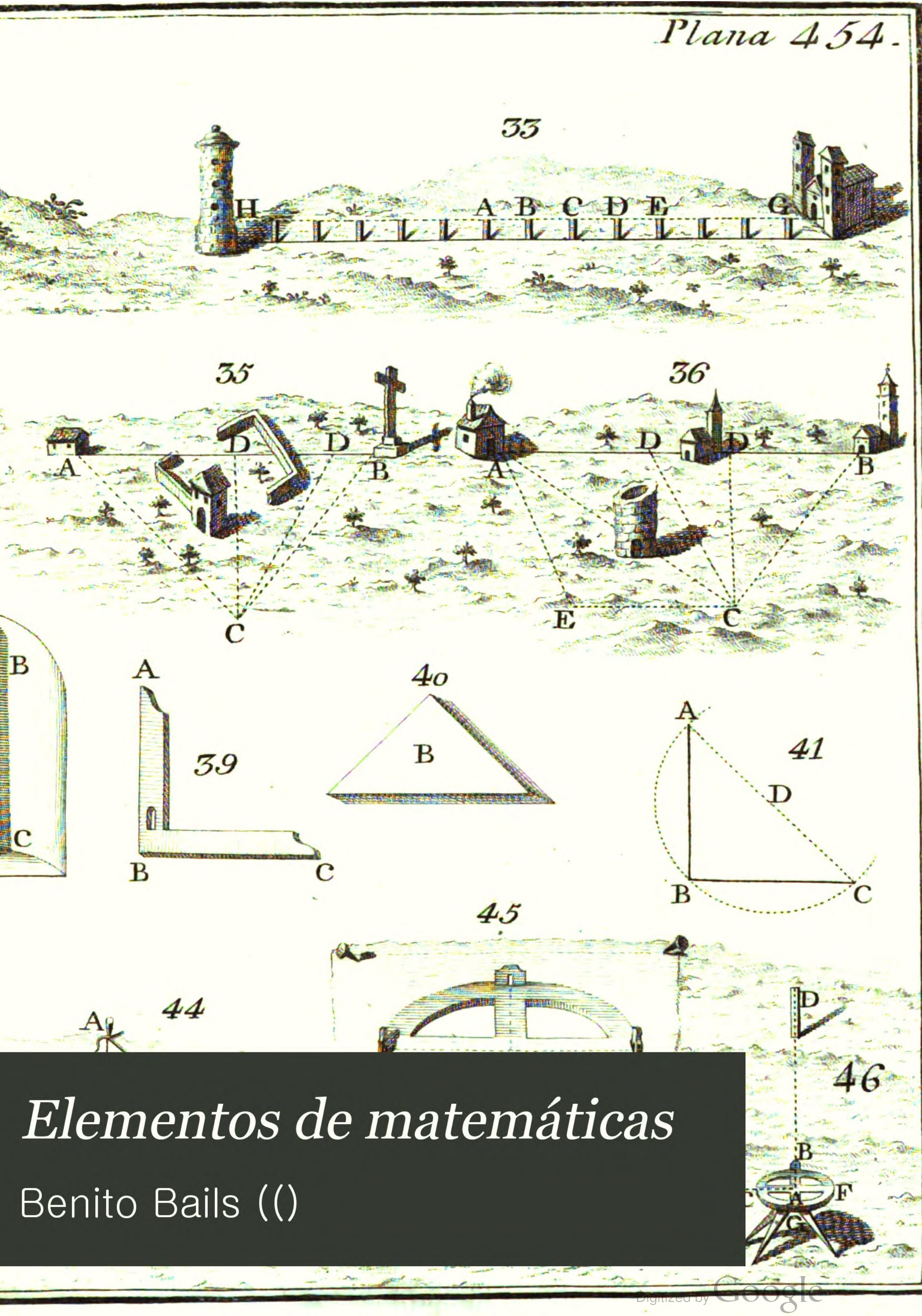
Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.
+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.
+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.
+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`



Elementos de matemáticas
Benito Bails (()
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

1. 201

Digitized by Google

MAT
FA 2737

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

TOMO I.

Digitized by Google

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,

Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

TOMO I.

BIBLIOTECA

SECCIÓN DE EXACTAS

MADRID.

Por D. JOACHIN IBARRA, Impresor de Cámara de S. M.

M.DCC.LXXIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROLOGO GENERAL,

Donde se dá noticia de algunos Cursos de Matemática publicados en varios idiomas.

Aunque harémos individual mencion de los tratados que estas obras incluyen quando manifestemos con qué auxílios hemos tegido los de la nuestra ; sin embargo no podemos menos de dar desde ahora una noticia por mayor de cada una de ellas , la que baste para manifestar en qué discrepan , ó se parecen á la que publicamos. Procurarémos hacer en este cotejo el papel de un mero relator , sin pretension ninguna de deslucir á los escritores beneméritos , sean de la nacion que fueren , que entraron antes que nosotros en la misma carrera ; que el apuntar los defectos de una obra no siempre arguye empeño de desacreditarla , mayormente quando el que los apunta reconoce que tendrán seguramente mucho que suplir en sus escritos , como nosotros lo confesamos de los nuestros , los hombres ilustrados que los registraren. Justo será que con la misma imparcialidad que hablarémos de las obras agenas , hablemos tambien de las propias , cuyas imperfecciones , á lo menos las que por ser de mayor bulto no se nos pueden ocultar , señalarémos con la modestia que corresponde , y la franqueza que en todo nos es tan genial.

Los Cursos de Matemática que han llegado á nues-

Digitized by Google

tras manos no todos son completos : algunos solo tratan de la parte especulativa de la Matemática, ó de la Matemática Pura, y en esto se diferencian esencialmente del nuestro. Pero no por eso dexarémos de incluirlos en este cotejo, movidos de algunas circunstancias que los hacen muy recomendables.

El Curso de que nos toca hacer mencion antes que de otro ninguno, es el del P. Tosca, Valenciano (1), sacado casi todo del que publicó en latin á mediados del último siglo Dechales, Saboyano (2); cuyo Compendio, atendido el tiempo en que salió á luz, no se puede negar que es de todo punto cabal. Para el tiempo presente, por razon de los muchos adelantamientos que ha hecho la Matemática con el talento y aplicacion de los Geómetras de este siglo, y fines del pasado, es sin duda alguna incompleta y diminuta la obra del Escritor Valenciano. Porque no trata ni del cálculo diferencial ni del integral, y así debia ser, una vez que es tan poco lo que trahe de Algebra, y omite la teórica de las curvas, doctrina muy necesaria para las investigaciones peculiares á la analisis superior; y en punto de Arquitectura, sobre no hablar de la

(1) *Compendio Matemático, en que se contienen todas las materias mas principales de las Ciencias, que tratan de la cantidad, que compuso el Dr. Thomas Vicente Tosca, Presbítero de la Congregacion del Oratorio de S. Felipe Neri de Valencia.* Valencia 1709, 1715. nueve tomos en 8.

(2) *R. P. Francisci Milliet Dechales Camberiensis Cursus seu mundus mathematicus.* Leon de Francia 1690. segunda edicion: quatro tomos en fol.

Digitized by Google

la Hidráulica, lo mas de lo que enseña acerca de la Civil se reduce al ornato, sin detenerse en ninguno de los dos ramos fundamentales de la distribucion y edificacion. Verdad es que trata de la Arquitectura Militar, de la Artillería, de la Navegacion, tratados que nos pareció oportuno excluir de nuestro plan, por fines que á su tiempo manifestarémos. Como quiera, dos circunstancias sumamente apreciables concurren en la obra de Tosca; es á saber, mucha claridad (y tambien es suma la de Dechales), y una disposicion general de los tratados, igualmente que una coordinacion particular de cada uno de ellos muy bien entendida; de modo que no dudamos afirmar que si se le hubiese hecho en estos tiempos al P. Tosca el mismo encargo que á nosotros, tendria España muchos motivos de celebrar tan bien fundada preferencia, así como no hubiera salido acaso tan precioso de nuestras manos como de las suyas el extracto del Mundo Matemático de Dechales.

Síguese el Curso de Wolff, ó Wolfio, Aleman (3), el mas antiguo, mas conocido, y mas completo de los cursos modernos hasta de pocos años á esta parte. Es constante que puso Wolfio mucha diligencia en la formacion de su Curso, y que tuvo noticia de lo mas que publicaron los Matemáticos que le precedieron, conforme lo

(3) *Christiani Wolfii &c. Elementa Matheseos universæ.* Ginebra 1743. cinco tomos en 4.

Digitized by Google

están manifestando los eruditos escolios, ó notas con que hermoseó sus tratados; pero es tambien notorio que despues de publicada su obra se han dado á luz otras muchas, que han perficionado inmensamente todos los ramos de la Matemática, ya se atienda á los inventos de sus autores, ya á su singular destreza en proponer con mejor método los asuntos. Euler, Cramer, Ricati, Stirling, &c. han promovido muchísimo, despues que Wolfio escribió, la teórica de las series; todos los tratados que tenemos hoy dia de cálculo integral son posteriores á la publicacion de su Curso; y la Dinámica, Hidrodinámica, Optica y Astronomía han adelantado infiníto con las investigaciones de Juan y Daniel Bernouli, de M. d'Alembert, Euler, Bouguer, Clairaut, Micheloti, La Lande, Bossut, Lambert, Halley, La Caille, &c. siendo cierto que desde que salió á luz la obra de Wolfio han mudado enteramente de semblante las Matemáticas. Estas obras modernas, de donde hemos sacado todo lo que incluye la nuestra, la grangean un grado de estimacion superior al que merece la del Escritor Aleman, por la mucha ventaja que los materiales de que nos hemos valido llevan á los que él tuvo á mano; porque no es posible dexe de perfeccionarse una ciencia como esta, quando se emplean á porfia en promover sus adelantamientos muchísimos ingenios de talentos y naciones tan diferentes. Pero si nuestros tratados son por la calidad de su doctrina acreedores á algun grado mas de estimacion que no los de Wolfio, lo son tambien por

la

Digitized by Google

la individualidad con que declaramos sus diferentes puntos: en solo un tomo incluyó aquel Escritor toda la Matemática Pura, que llena los tres primeros de nuestro Curso; para cada tratado mayor de Matemática Mixta hemos destinado un tomo, y seis para todos entre mayores y menores, siendo así que Wolfio los encierra todos en tres tomos no mas; y últimamente, nos lisongeamos con que merezca alguna consideracion un tomo entero que publicamos de tablas, donde están impresas las astronómicas mas dilatadas y puntuales que se han visto en Europa hasta el año de 1771.

¿Quién creerá que la Nacion Francesa, tan ilustrada y tan propensa á escribir, esté todavia sin un Curso completo de Matemáticas? Si tiene alguna obra que pudiera llamarse con este nombre, es la que dió á luz el Abate La Caille (4) con el título de Lecciones, la qual en medio de la excesiva concision con que está escrita dá á conocer la profunda doctrina de aquel laboriosísimo Matemático. Su tomo primero, donde trae los tratados de Matemática Pura, es tan sobremanera conciso, que se han publicado años pasados dos Escritos con el fin de aclararle, bien que sin lograr el intento ninguno de sus autores. El autor del primero (5), sobre dar muestras de no tener tino nin-

(4) *Leçons élémentaires de Mathematiques, &c. par M.r l'Abbé de la Caille, &c.* Paris 1764. quatro tomos en 8. Es segunda edicion.

(5) *Le guide des jeunes Mathématiciens, dans l'étude des Elémens des Mathématiques de M. l'Abbé de la Caille.* Paris 1765. un tomo en 8.

ninguno Matemático, es prolixo, molesto y pesadísimo hablador en lo facil, y mudo en lo dificultoso. El autor del otro (6) no pensó en aclarar al Abate La Caille: su intento fue substituir otras lecciones en lugar de las de su antecesor, tan dificultosas de entender en algunas partes como las de La Caille; honrando su portada con el nombre de aquel ilustre y acreditado Geómetra, muy seguro de grangear con este sobrescrito apasionados á su libro.

Ademas de estar escritas las Lecciones del Abate La Caille con la extremada concision que hemos dicho, carecen de muchos tratados para que merezcan lugar entre los Cursos de Matemática; porque de los principales solo incluyen la Mecánica, Optica, y Astronomía, y de los de segunda orden no tienen mas que la Perspectiva. Pero quando ponderamos tanto la concision con que están escritas, no es seguramente con el ánimo de hacer el mas leve perjuicio á la memoria de su autor, aun quando fuera bastante para tan odioso fin nuestra decision; nos consta que no fue de su parte ni insuficiencia, ni cortedad de explicacion. Llevó la mira de encerrar en volúmenes de poco bulto los fundamentos de las materias que en desempeño de su obligacion habia de explicar en su aula, remitiéndose para extenderlas á los doctos comentarios con que las ilustraba en señaladísimo aprovechamiento de sus oyentes.

(6) *Leçons Elémentaires de Mathématiques, par M. l'Abbé de la Caille, &c Nouvelle edition, &c. par M. l'Abbé Maric.* Paris 1770. un tomo en 8.

Digitized by Google

tes. Quiso ahorrar á sus discípulos la fatigosa tarea de escribir materias que no son para dictadas, y precaver se aburriesen con los errores que forzosamente habian de cometer al tiempo de escribir cálculos y fórmulas que no entendiesen. Si los que están algo sueltos en calcular se equivocan aun quando calculan en su retiro lejos de objetos que puedan divertirles la atencion ¿quántas veces no tropezarán los que en un numeroso concurso escribieren, notando otro, cálculos complicadísimos? Fuera de que siempre están con mas limpieza las figuras en la lámina mas desaliñada que no en los quadernos mejor arreglados.

Entre muchos Cursos de Matemática que acaso tendrán los Ingleses, dudamos de que haya ninguno mas cabal que el que componen las obras de Emerson (7) en diez tomos en octavo, y dos en quarto. Hablamos en estos términos, porque si nos paramos en las fechas de su publicacion, parecerá que el intento de Emerson fue escribir de todos los ramos de la Matemática, y no coordinar sus tratados de modo que deban mirarse como partes enlazadas de una misma obra. El tomo quinto, que trata del cálculo de las fluxîones y fluentes, salió á luz el año de 1757, cinco años antes que el tratado de Arismética, que

(7) *Cyclomathesis: or an easy introduction to the several branches of the Mathematicks. Being principally designed for the instruction of young students, before they enter upon the more abstruse and difficult parts thereof.* Londres 1763. un tomo en 8. que trata de la Arismética, y debe mirarse como el primero de todos.

Digitized by Google

que es el primero de todos los demas: en su Algebra, publicada en 1764, apela á la doctrina de las secciones cónicas, que no se dió al público hasta el año de 1767, y en su Miscelanea, que puede mirarse como la conclusion de su Curso, trata muchos puntos que tenian muy oportuno lugar en los tomos antecedentes. Como quiera, es de mano de maestro quanto nos ha dado Emerson, sin embargo de haber en su Algebra algunas cosas que no están demostradas, y de los descuidos, que segun Juan Bernouli el Mozo (8) se le han notado en su Astronomía. Solo celebráramos que se explicara con menos laconismo de lo que suele, por cuyo motivo estamos persuadidos á que será trabajosa para muchos lectores la inteligencia de sus escritos. Varias veces se nos ha ofrecido ocasion de reparar que muchos escritores, y lectores tambien, equivocan la obscuridad con la concision, y que en los paises donde es exercicio estimado dar lecciones de Matemática á precio de dinero, suelen escasear los maestros la explicacion en sus escritos con la mira de hacerse menesterosos.

Por lo que mira á los asuntos que abraza el Curso de Emerson, considerando como parte suya el tomo de Miscelanea, confesamos que son en mayor número que los del nuestro, donde no hablamos ni de Navegacion, ni de la Arismética de los Infinitos, ni del Método de las Diferencias, ni del Cálculo de las Probabilidades, ni de la Forti-

(8) Tomo primero de su *Recueuil pour les Astronomes*. Berlin 1771.

Digitized by Google

tificacion y Artillería, que Emerson trae, bien que muy compendiosamente. Pero tambien aseguramos, y esperamos se arrimen á nuestro dictamen los que tuvieren oportunidad y paciencia de hacer el cotejo, que ninguno de los tratados que ofrecemos al público reconoce ventaja á los del Escritor Inglés en la extension, y acaso se la llevan los nuestros á los suyos en punto de claridad. Nuestra Dinámica, Hidrodinámica, Optica, y Astronomía incluyen muchos puntos que Emerson no tocó; en nuestra Trigonometría, bien que no tan difusa como la suya, hay proposiciones y fórmulas muy dignas de saberse, y aun necesarias; y últimamente nuestro tomo de tablas, y el de Arquitectura dan algunos quilates mas de valor á nuestra recopilacion.

El Curso de Hennert, Olandés (9), Catedrático de Matemáticas en Utrect, no es á buen seguro el último en quanto al concepto que merece, así como lo es por la fecha de su publicacion. En los nueve tomos en octavo de que se compone, trata su autor con singular maestría y claridad todos los ramos de la Matemática, haciendo en los tratados mixtos una aplicacion continua del cálculo integral mas que ninguno de los escritores de que hemos ha-

(9) Los tres primeros tomos, donde trata de la Matemática Especulativa, tienen este título: *Cursus Mathematicus*. Utrect 1766. 68. tres tomos en 8.

Los otros seis, que incluyen la Matemática Mixta, se intitulan: *Cursus Matheseos aplicatæ*. Utrect 1766. 1775. seis tomos en 8.

Digitized by Google

hablado hasta ahora. Por cuyo motivo ha puesto en el último tomo de los tres primeros, donde trata de la Matemática Pura, lo preciso no mas de cálculo integral para manifestar sus usos en algunas operaciones de Geometría, con el fin de dilatarse mas sobre este ramo de analisis en los tratados prácticos al paso que lo pidiere la naturaleza de las diferentes cuestiones que hubiese de resolver. Estamos muy agenos de tener por errado este camino: mucha doctrina de cálculo integral en abstracto, ó sin aplicacion á la práctica, cabe en un tratado escrito de intento sobre el asunto: pero en un Curso, nos parece mas acertado declarar los diferentes modos de integrar á medida que se hace preciso usarlos; quedando por este medio mas pagado, y mucho mas ilustrado el entendimiento.

Si es muy apreciable el Curso del Profesor Olandés por la destreza y profundidad con que su autor trata los asuntos, particularmente los mixtos, lo es igualmente por el número de los que incluye. Ademas de todos los tratados principales, y de la Perspectiva, trae en su tomo noveno quanto pertenece á la Ciencia y Arquitectura Naval, y á la Tormentaria, aprovechando lo mejor que sobre estas materias se ha escrito de poco acá en Inglaterra, Francia, Alemania, é Italia. Verdad es que ha omitido la Gnomónica, la Arquitectura Civil é Hidráulica, y no trae tablas, que se hallan en nuestro Curso, el qual sobre declarar la Matemática Pura con mucha mas extension que no el de Hennert, lleva una Geometría Práctica muy com-

ple-

Digitized by Google

pleta, cuyo tratado no está seguramente por demas en ningun Curso de Matemáticas.

Estos son los Cursos completos que han llegado á nuestras manos. Los que solo tratan de la Matemática Pura son dos no mas: serian tres, y tambien quatro, si quisiéramos considerar como un cuerpo de obra lo que ha publicado sobre asuntos de Matemática Especulativa el célebre Matemático Suizo Leonardo Euler en diferentes obras que á su tiempo darémos á conocer. Pero por no incluir ninguna de ellas, ni la Geometría Elementar, ni la Trigonometría, no puede componer su conjunto un Curso completo; obligándonos el mismo reparo á formar igual concepto de las Instituciones Analíticas de Ricati y Saladini.

El primero de los dos Cursos de Matemática Pura que conocemos, le publicó en Francia el Abate Sauri (10), y viene á ser un extracto, y una especie de introduccion á tratados profundos, que sobre las materias que abraza han dado á luz en estos últimos tiempos los mas acreditados Matemáticos. De esto mismo se indicia la mucha diligencia de su autor, corriendo con ella parejas la claridad de su explicacion, y el despejo con que resuelve en su tomo quinto diferentes cuestiones muy importantes de Matemática Mixta.

El otro Curso incompleto de Matemáticas es obra de un

(10) *Cours de Mathématiques, par M. l'Abbé Sauri, ancien professeur de Philosophie en l'Université de Montpelier.* Paris 1774. cinco tomos en 8.

Digitized by Google

un docto Religioso Dominico Italiano el P. Gherli (11), y la mejor sin duda alguna que hemos visto hasta el dia de hoy entre tantas como hemos registrado. Todos los asuntos que incluye los toma el P. Gherli desde sus primeros fundamentos, y los propone con tan feliz explicacion, que dudamos se hayan publicado hasta ahora Elementos de Matemática que tanto puedan honrar á un Escritor; y aunque lo mas que trae acerca de las materias de alguna elevacion está sacado de los escritos del profundo calculador Leonardo Euler, no ha dexado de disfrutar las obras de otros Escritores muy acreditados; pero sabe aclararlas con tal paciencia y felicidad, que, por decirlo así, los ha humanado, y no hay Curso alguno donde los que desearen hacer progresos sólidos y rápidos en la Matemática, puedan aprovechar tanto como en los Elementos del P. Gherli.

Ya es tiempo que hablemos de los nuestros, los quales en quanto á su contextura discrepan esencialmente de todos los Cursos de que hemos hecho mencion. Sus autores escribieron en paises donde son muchos los Matemáticos, y muy conocidas las obras magistrales que tratan de los diferentes ramos de esta facultad; obligóles esta circunstancia á amoldar, digamoslo así, en sus entendimientos los asuntos sobre que escribian, á fin de que tuviesen

en

(11) *Gli Elementi Teorico-Pratici delle Matematiche pure del P. Odoardo Gherli Domenicano, Professore di Teologia Dogmatica nell' Università di Modena resi publici da Domenico Pollera.* Modena 1770. 1777. siete tomos en folio.

Digitized by Google

en la forma, ya que no en la substancia, algunos visos de novedad. Siguióseles de aquí á estos escritores mayor dificultad que á nosotros, y tambien mayor uniformidad en sus escritos que no en los nuestros. Enterados mas de lo que quisiéramos de que eran muy estrañas para nuestros hombres las doctrinas que íbamos á publicar, y de lo mucho que importaba saliese al público con toda la posible brevedad nuestro trabajo, nos detuvimos poco en dar á los puntos que nos tocaba tratar un aspecto muy diferente del que tenian en las obras clásicas que nos dedicamos á extractar, ó copiar: solo pusimos cuidado en echar mano de las mas celebradas, y enlazar con todo esmero los pedazos que para la formacion de un tratado sacábamos de diferentes. Al paso que nos íbamos empeñando en nuestra tarea, tambien nos íbamos desentendiendo de algunos recelos que al principio nos induxeron á dar poco volumen á nuestros tomos, y este es el motivo por que van siendo mas voluminosos á medida que se van alejando del primero. Por los mismos recelos, al tiempo de poner por obra el plan que habíamos formado de estos elementos, le alteramos algun tanto, especialmente en la parte especulativa. Nuestro primer intento fue destinar para el cálculo integral todo el tomo quarto, con el fin de dar á conocer los fundamentos de los principales métodos de integracion, que de no muchos años acá han inventado, ó mejorado los Matemáticos mas acreditados de Europa; pero nos pareció despues que quatro tomos de Matemática Pura podrian dar visos de

Digitized by Google

fundadas á las quejas de algunos hombres que miraban con no poca oposicion nuestro destino, los quales ciñendo su patriotismo al corto número de los objetos que alcanzan, ó tienen al rededor de sí, coadyuvan con repugnancia, ó dexan de oponerse violentos á las empresas de universal utilidad. Y hechos cargo de que, todo bien considerado, los tratados mixtos son los que mas importan, sacrificamos la especulativa á la práctica, contentándonos con incluir de cálculo integral en el tomo tercero lo suficiente para los usos que en adelante se nos ofreciese hacer de este ramo de analisis. Sin embargo, el rumbo que despues resolvimos seguir para explicar las apariencias astronómicas, ó por mejor decir el pedazo de Astronomía Física que determinamos trasladar, nos precisó á añadir en el tomo octavo por via de introduccion á este asunto, algunas proposiciones peculiares á puntos tratados en los tomos antecedentes, y especialmente la integracion de algunas fórmulas, que mejor hubiera estado en el Tomo tercero. No citarémos, con el fin de que se nos disimule este lugar, el egemplo de otros Matemáticos que publicaron diferentes tratados juntos en cuerpo de obra, interpolando, donde les hacia falta, alguna proposicion omitida en el tratado al qual pertenecia. Dirémos francamente que provino este descuido de la prisa con que íbamos despachando tratados, y de no haber seguido para la formacion de estos Elementos el rumbo que debíamos, y el único que tenemos por seguro, bien que no le han seguido ni Emerson,

Digitized by Google

sòn, ni Hennert, ni Gherli. Todo escritor que ha de componer una obra formada de varios tratados enlazados unos con otros, deberia empezar escribiendo el último tratado, y proseguir retrocediendo de mano en mano ácia los primeros: no tiene otro modo de saber, sin riesgo de que se le olvide proposicion ninguna, qué fundamentos ha de echar en los primeros tomos para la acertada composicion de los siguientes.

Manifiesta este Prólogo que no hemos tenido á empeño el dar la preferencia á un autor solo para que solo él nos sirviese de guia, ni tenido en tanta estima los escritos de alguna nacion, que nos desdeñásemos de aprovechar los que han publicado las demas. El ingenio, el talento, la aplicacion no están vinculadas en hombre ni nacion alguna; y en punto de Matemáticas, todas ellas se honran con haber criado hombres de inventiva, á cuya meditacion y laboriosidad tiene muchísimo que agradecer esta ciencia, cuyos descubrimientos abrieron el camino para todo lo que han adelantado los Matemáticos de estos últimos tiempos; consolándonos con sus adelantamientos de que no fuesen eternos sus maestros. Siempre hemos graduado de injustos, y tenido por hombres de limitada suficiencia á ciertos censores, para quienes basta que sea un escritor de una nacion que no les quadra para despreciar sus obras; obstinados en que solo cria escritores apreciables aquella que tiene la alta fortuna de que ellos la miren con benevolencia, ó la amparen con su patrocinio. ¿Qué concepto

Digitized by Google

merecen otros que se alzan con el oficio de jueces en todos los ramos de la literatura, señalando á su antojo el lugar que á cada literato corresponde, y decidiendo del mérito literario de las naciones, sin caudal ninguno para entender sus obras? A muchos de estos hombres temerarios hemos oido decidir con tono magistral, que si el autor de una obra matemática es Frances, ha de ser superficial: si Inglés, oscura: si Aleman, pesada: si Italiano, difusa. El que quisiere juzgar de estas cosas con conocimiento, debe acostumbrarse á mirar mucho con ojos que alcancen lejos; y quanto mas hubiere visto, mas benigno será seguramente para con los demas. El portentoso, el divino, el inmortal Newton, así como era el mayor de todos los matemáticos, era tambien el mas modesto.

Muchos son los ojos que censuran, pocas las manos que obran; mas facilmente se ven faltas agenas, que se corrigen las propias; mejor se nota el error, que se abraza lo acertado; y mas presto se vitupera lo malo, que se loa y engrandece lo bueno. ¿Quién trabajaria, ni procuraria mejorar su siglo con las políticas y civiles letras, si temiese la emulacion? Victoria es atropellarla, y grandeza de ánimo vencerla. Gerónimo de Huerta en el Prólogo del tomo segundo de su traduccion de la Historia Natural de Plinio.

PRÓ-

Digitized by Google

PRÓLOGO

A este Tomo primero.

Vá para un siglo que han mudado de semblante las Matemáticas: el empeño quasi universal con que se emplean en su estudio las naciones de Europa, ha ensanchado portentosamente los límites de esta ciencia, siendo sus adelantamientos consecuencia forzosa de haberse mejorado, y multiplicado con esta general aficion los métodos, cuya perfeccion multiplica tambien, y facílita los descubrimientos. Pero no todos los que se dedican al cultivo de la Geometría nacen con potencias que les merezcan lugar señalado entre los inventores: los mas tienen que ceñirse á hacer perceptible lo que inventaron otros Matemáticos de superior talento, cuyos escritos ha hecho algunas veces memorables su misma obscuridad, dexándonos sus autores con la sospecha de que su mira fue causarnos antes espanto que admiracion. Esta es la causa de haberse publicado tantos tratados elementares en estos últimos tiempos, y de ser no poco embarazosa entre ellos la eleccion. Porque á pesar de la cuidadosa prolixidad con que se echa de ver que algunos de ellos se escribieron, apenas hay uno que dexe satisfecho á todos respectos el deseo de los aficionados, y sea acreedor á la aprobacion de los inteligentes. Todos tienen algun tratado que desdice de los demas, y pedazos hay en un mismo tratado donde se echa menos, ya la explicacion, ya la diligencia del escritor.

Debíamos, pues, mirar al formar esta recopilacion como un escollo peligrosísimo el preocuparnos á favor de un autor solo, ni tampoco debíamos dexarnos halucinar de los créditos con que corren varios elementos, cursos, lecciones, ó instituciones de Matemática, que habian llegado á nuestra noticia. Para fundar el edificio que íbamos á levantar, quisimos echar mano de los materiales mas recientes, fundando en su buena calidad la firmeza de la fábrica, y procurando hermosearla con la novedad, ansiosos de asegurarla los mas años que pudiésemos del achaque de antiquada (1). Para lograr en lo que cabe este intento, buscamos correspondencias, que avisándonos con puntualidad las obras que se fuesen publicando, nos proporcionasen el adquirirlas; alentándonos la esperanza de llevar por este camino la obra al mayor grado de perfeccion que cupiese en nuestra cortedad, lo que bastaba para que no nos espantara por costosa la jornada, ni por penosa nos amedrentara.

Una

(1) El que quisiere apreciar lo que hemos hecho con esta mira, habrá de cotejar la fecha de la impresion de cada uno de los tomos de esta Obra con la de su publicacion. El Tomo primero se acabó de imprimir el dia 26 de Abril del año de 1772: el Tomo II. el dia 22 de Agosto de 72: el III. el dia 24 de Diciembre de 72: el IV. el dia 31 de Julio de 73: el V. el dia 23 de Julio de 74: el VI. el dia 15 de Enero de 74: el VII. el dia 11 de Marzo de 75: el VIII. el dia 16 de Agosto de 75: el X. el dia 13 de Septiembre de 76: el IX. es el único que falta estampar; las láminas que le corresponden se están abriendo meses ha.

Digitized by Google

Una de las primeras noticias que nos participaron fue haber dado á luz un Curso de Matemáticas M. Bezout (2), individuo de la Real Academia de las Ciencias de París. Por la notoria habilidad de este Matemático nos persuadimos desde luego, á que aun quando no se encontrasen en su Curso métodos propios del autor, propondria y demostraria por lo menos los agenos con novedad. El exercicio en que nos constaba se habia empleado muchos años en París de Maestro de Matemáticas, ayudado de su entendimiento claro y despejado, pudo proporcionarle dar á algunos, ya que no á todos los asuntos, un aspecto que los hiciera mas perceptibles para el comun de los lectores. El dar la última mano á una obra doctrinal debiera dexarse, si fuese posible, para quando despues de andar en manos de varios sugetos de mediana capacidad y aplicacion, se supiese donde pecó de corta la explicacion del autor, ó anduvo escaso en los egemplos.

Despues de vista la obra hallamos fundada con efecto nuestra conjetura. La Arismética que trae nos pareció á todas luces muy cabal, y la mejor qne hasta entonces hubiésemos registrado. Solamente entendimos que la doctrina de las decimales ocuparía mejor lugar, declarándola separadamente despues de los quebrados comunes; y con esta le-

(2) *Cours de Mathématiques, a l'usage des Gardes du Pavillon, et de la Marine. Par M. Bézout, de l'Academie Royale des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon et de la Marine, et Censeur Royal.* Paris 1769. seis tomos en 8.

Digitized by Google

leve alteracion la copiamos al pie de la letra, qual la publicó M. Bezout.

No hemos escrito á tan poca costa la Geometría, ni tampoco era posible, una vez que hicimos ánimo de no adoptar los Elementos de Euclides. Las mismas circunstancias que en el concepto de algunos constituyen su excelencia, hacen muy trabajoso para muchísimos su estudio. Nuestro intento fue allanar quanto cupiese el camino á los principiantes, pero sin desentendernos de la estrecha obligacion que nos corria de nunca jamas sacrificar á la mayor facilidad la escrupulosidad geométrica, y de conciliar el rigor matemático con el alivio de los que no se desdeñasen de buscar maestro en nuestros escritos.

Fuenos, pues, preciso acudir á muchas Geometrías para teger la nuestra (3); y si el mérito de una obra pendiera del trabajo que costó escribirla, no sería este á buen seguro el tratado menos apreciable de nuestra recopilacion. Sea vanidad, sea disimulo, apenas hay un escritor que siga en la formacion de sus tratados el mismo plan de los escritores que trataron antes que él los mismos asuntos. Componer de muchos tratados uno solo, es seguir un plan que no sea el de ninguno, ó reducirlos todos á uno mismo; y quando por la naturaleza del argumento hay mucha trabazon entre las proposiciones, cuesta y debe costar mucho trabajo el conseguirlo, en castigo de la temeridad de intentarlo.

Pa-

(3) Está sacada de nueve, ó diez, todas muy distintas unas de otras.

Digitized by Google

Para descansar un rato de esta fatigosa tarea nos entretuvimos traduciendo la Trigonometría plana que trae M. Bezout á continuacion de su Geometría elementar, con el intento, que hemos puesto por obra, de estamparla tambien á continuacion de la nuestra. Pareciónos ocioso buscar otra por los mismos motivos que echamos mano de su Arismética; quedando con las esperanzas de que se arrimen á nuestro dictamen todos los facultativos que tuvieren proporcion de cotejarla con otras, y no miraren como desmerecimiento propio el hacer justicia al traductor.

La Geometría Práctica, bien que entresacada de quantas pudimos recoger, no nos costó, ni con mucho, la misma fatiga que la Especulativa. Como todo lo que aquella enseña va fundado en lo que esta demuestra, y no hay entre las maniobras de la práctica el estrecho enlace que traba unas con otras las proposiciones teóricas, la tegimos con gran facilidad. Ademas de las obras que nos socorrieron para componer los Elementos de Geometría, en las quales se halla alguna aplicacion de la teórica á casos prácticos, y de la obra muy conocida de Bion (4), halla-

(4) *Instrumens de Mathématique*: un tomo en 4. del qual se han hecho varias ediciones en París. Es obra que declara el uso, y la construccion de los instrumentos que sirven en todos los tratados prácticos de la Matemática. Los que no quisieren obra tan extensa, podrán contentarse con la siguiente, de la qual se han publicado tres ediciones en poco tiempo en Inglaterra.

A treatise of such Mathematical instruments, as are usually put into a Portable case, shewing some of their use in Arithmetic, Geometry, Trigono-

Digitized by Google

llamos no poco que aprovechar en algunos tratados prácticos, que acababan de darse al público (5) quando estábamos para rematar esta tarea (6).

Lleva nuestra Geometría práctica una como introduccion donde con motivo de tratar de las medidas de distancias, tocamos un punto de muchísima consideracion, manifestando con los mismos argumentos que M. de Lacondamine

nometry, Spherics, Architecture, surveying, Geography, Perspective, &c. with an appendix; containing the description and use of the Gunners Calipers, and the description of, and precepts for the delineation of, Ship-guns and sea mortars, &c. By Iohn Robertson. Un tomo en 8. Londres 1775.

(5) *L'arpenteur forestier, ou methode nouvelle de mesurer, calculer, et construire toute sorte de figures, &c. Par M. Guiot.* Un tomo en 8. París 1764.

Manuel de l'arpenteur, &c. Par M. Ginet: un tomo en 8. París 1770.

(6) Por ser la medida de la extension el fin á que se enderezan todas las especulaciones de la Geometría, y un punto principalísimo la medicion de los cuerpos, de cuya operacion pende el aforar, ó medir la cabida de los vasos en que se guardan los líquidos, para la recaudacion de los derechos Reales; se han dedicado los Ingleses con particular estudio á facilitar todo lo posible esta medicion. De aquí proviene que se han publicado en Ingles excelentes tratados prácticos sobre el asunto, de los quales han llegado á mis manos los siguientes.

The British Gauger: or Trader and Officer's instructor, in the Royal revenue of the excise and customs.

Part. I. Containing the necessary rules of vulgar and decimal arithmetic, and the whole art of practical Gauging, both by pen and rule; illustrated with a great variety of curious and useful examples.

Part. II. An historical and succint account of all the Laws relating to the excise, from the first commencement thereof, to the present time. To wich are added tables of the old and new duties, drawbacks, &c. on beer, ale, spiri-

Digitized by Google

ne (7) la necesidad de reducirlas estas y las demas á sola una, y damos alguna luz acerca de los medios que en nuestro juicio podria practicar el gobierno para conseguir fin tan deseado. Hémoslo hecho sin el menor recelo de que se nos dé en cara con que hemos metido la hoz en mies agena ; la verdad se hizo para todos los hombres , y en ninguna clase particular está vinculado el privilegio de indagarla. Nos lisongeamos con que si lo hemos errado no faltará quien salga al encuentro del daño que nuestra equivocacion pudiera ocasionar ; estamos prontos á mudar de parecer , así en este asunto , como en otro qualquiera , siempre que se nos haga patente que vamos descaminados. En las ciencias naturales no reconocemos mas legislador que la razon , y deseamos acudan á su desagravio , quando la desconociéremos, patronos quales ella misma , si se la permitiese buscarlos, los escogiera.

Podríamos concluir aquí este Prólogo ; pero antes de fi-

rits , soap , Candles , &c. By Samuel Clark. Londres 1765. un tomo en 8.

A General treatise of Mensuration : Containing Many useful and necessary improvements. Composed for the benefit of Artificers , builders , measurers, surveyors , gaugers , farmers , gentlemen , young students , &c. The whole being intended as and easy introduction to several parts of the mathematicks. By S. Robertson. Londres 1767. un tomo en 8.

En Paris se publicó el año pasado de 1778 en un tomo en 8. la segunda edicion de una obra del P. Pesenas sobre medida de toneles, arqueo de navios, &c. cuyo titulo es: *La théorie et la pratique du jeaugeage des tonneaux , des navires , et de leurs segmens.*

(7) En las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de Paris para el año de 1747.

Digitized by Google

finalizarle tenemos por oportuno responder á dos preguntas que se nos podrian hacer ; la una acerca de la Geometría elementar ; la otra , acerca de la medida que seguimos constante , é invariablemente.

I. Por lo que mira á la Geometría , aunque los Elementos de Euclides (8) han sido por muchos siglos la carti-

(8) Wolfio tom. 1. de su Curso , pág. 96. dice :

Euclides et ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia : sed cum ingeniosissimus Leibnitius similitudinis notionem mecum communicaret , atque moneret multum ejus in geometria esse usum ; ego vero meditatus amplissimum deprehenderem ; similitudinis principium in geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo à me facillimè demonstrata deprehendes , quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent.

Euclides , y á su exemplo todos los Matemáticos que ha habido despues de él , no han tenido mas fundamento de todas sus demostraciones , que el principio de la congruencia. Pero habiéndome dado á conocer el ingeniosísimo Leibnitz la nocion de la similitud , ó semejanza , previniéndome que podia ser de mucho uso en la Geometría , el qual despues de meditar en ello conocí que podia ser dilatadísimo ; no puse el menor reparo en introducir en la Geometría el principio de la semejanza. Me ha servido , conforme se verá , para demostrar con suma facilidad muchas proposiciones , cuya evidencia no se puede manifestar por el principio de la congruencia , sino por rodeos.

Tomo V. pag. 28.

Nos equidem in Elementis hisce matheseos non exhibuimus Elementa Euclidis ipsa ; nihil tamen in iis occurrit , quod non reperiatur, vel in Arithmetica , vel in Geome-

Aunque no damos en esta obra los Elementos de Euclides, quantas proposiciones hay en estos se hallarán , ó en nuestra Arismética , ó en la Geometría, ó en el Algebra , conforme lo harémos pa-

Digitized by Google

tilla, digamoslo así, de los Geómetras, hemos tenido por conveniente, y necesario no adoptarlos, siguiendo el egemplo de muchos Matemáticos de opinion, que escribieron con la mira de facilitar la tarea á los principiantes, sin el mas leve perjuicio del rigor geométrico. No se les hubiera quitado á estos Elementos la antigua posesion en que estaban, si hubiera sido perfecta, ó sin graves defectos por lo menos su coordinacion; los hubieran adoptado Tacquel, Wolfio, Thomas Simpson, Emerson, Boscowich, y otros muchos bastante cuerdos para distinguir la Geome-

metria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus, & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in logica latina (§ 799, 854, 855) explicamus, ad usum tamen Tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

patente mas adelante. Nuestro principal cuidado ha sido demostrarlas con todo rigor, ajustando nuestras demostraciones á las reglas que dimos en nuestra Lógica latina; pero acomodándolas á la capacidad de los principiantes, constándonos por la experiencia de muchos años el grandísimo beneficio que de aquí se les sigue.

No desaprueba, pues, Wolfio, y él mismo dá el egemplo, que se coloquen las proposiciones de la Geometría Elemental por otro orden que el que se repara en los Elementos de Euclides, ni que se siga en su demostracion un método, principio, ó rumbo distinto del que siguió el Matemático Griego.

Vito Caraveli en su Obra intitulada *Euclidis Elementa quinque postrema solidorum scientiam continentia, opera & studio viti Caraveli, ad juventutis usum*

Digitized by Google

metría de Euclides de los Elementos del mismo autor. Su Geometría, esto es, las proposiciones que trae en sus Elementos, han sido y serán en todos tiempos el fundamento mas sólido del estudio de las Matemáticas; pero sus Elementos, esto es, el orden por el qual las colocó, des-

me-

usum accommodata. Nápoles, un tomo en 8. 1750. dice:

Neque porro geometris omnibus libellum hunc offero... sed juventuti, quæ nunc primum huic dat nomen facultati, operam non inutilem præstitisse me affirmo, ut compendio & laboris, & temporis illuc inoffenso pede perducantur, quo cæteri per salebrosum tramitem, ac pene impervium vix, ac ne vix quidem pervenerunt. Quem enim non terrent, aut certe non fatigant, ac pene excerebrant, ut ita dicam, Euclidis, Commandini, Clavii longissimæ, & quandoque difficillimæ demonstrationes?... Habes igitur, lector studiose, qui ad mathematicam animum adpellis, in hoc libello, quicquid ad geometriam solidam facit; & ita habes, ut ausim dicere, nihil, nisi mediocrem animi attentionem ad ea intelligenda omnia opus tibi esse, quod commodi ut tibi pararem quandoque Euclideas demonstrationes prolixas, intricatasque posthabui, aliasque faciliores, brevioresque substitui.

No he compuesto esta obrita para los Geómetras; pero aseguro que será de alguna utilidad á los principiantes, de manera, que con menos tiempo y trabajo llegarán sin tropiezo alguno al término adonde otros apenas han llegado, ó no han llegado por un camino áspero, é intransitable. ¿A quién no espantan, cansan y desatinan, por decirlo así, las larguísimas, y á veces dificultosísimas demostraciones de Euclides, Comandino y Clavio? ... Los lectores aplicados, que se dedican al estudio de las Matemáticas hallarán en este librito quanto pertenece á la Geometría de los sólidos, pero lo hallarán declarado de modo que para su inteligencia les bastará con mediana aplicacion; y con el fin de proporcionarles este alivio, he desechado las demostraciones difusas, é intrincadas de Euclides, substituyendo en su lugar otras mas breves y mas fáciles.

Y

Digitized by Google

merecen mucho si se cotejan con los que han publicado muchos modernos. A ninguno que estuviere impuesto en la Geometría de Euclides, bien que no la haya estudiado por sus Elementos, le podrá parar el hallarlos citados en los escritos de diferentes Matemáticos, cuya inteligencia

Y en su *Elementa Matheseos universæ tomus primus, qui Geometriam planam, seu priores sex libros Euclidis breviter demonstratos complectitur.* Nápoles 1752. un tomo en 8. añade:

In quinto dumtaxat libro ab Euclidis methodo recessi, aliamque substitui minus discentibus arduam; ita tamen rem omnem transegi, ut servato propositionum ordine easdem veritates faciliori, ut spero, nullique non commoda ratione exposuerim.

Solo en el libro quinto me he apartado del método de Euclides por seguir otro mas facil para los principiantes; pero lo he hecho de modo, que sin alterar el orden de las proposiciones, las he demostrado por un término mas facil, y si no me halucino, mas proporcionado á la capacidad de todos.

Lechi en el Prólogo del tomo primero de sus *Elementa Geometriæ theoricæ, & practicæ*, impresos en Milan el año de 1753 en dos tomos en 8. se explica en estos términos:

Erunt aliqui, & hi quidem antiquitatis retinentissimi, qui solum Euclidem prælegi pueris oportere putent, alium præterea neminem: magnum nomen, & antiquæ gloriæ fama verendum, ac pœne sacrum, Euclidem esse: quotquot retroactis seculis floruerunt geometræ, ab hujus elementis, velut à communi quodam geometriæ ludo, prodiisse: nefas proinde esse ab ejus formula, præscriptoque desciscere. Quod si paulo durior Tironi videatur Eucli-

Algunos hombres, extremados partidarios de lo antiguo, quieren que los muchachos estudien la Geometría por Euclides, y no por otro autor ninguno: que por ser Euclides un escritor de mucho nombre, le miremos por razon de la fama de su antigua gloria con respeto, y casi con reverencia; y que por haberse formado por sus Elementos como en una escuela comun de Geometría todos quantos Matemáticos de opinion ha habido en los siglos pasados, sea un atentado apartarse de su obra cia solo pide que se tenga presente la proposicion citada, y no el autor donde se ha visto su demostracion: Así como á los que han estudiado las secciones cónicas en algun tratado moderno, no les paran las demostraciones (y se hallan bastantes) que se remiten al tratado que sobre las mis-

clides hoc ipso tamen experimento probari ajunt adolescentum ingenia, & tanquam lydio lapide eos explorari sane paucos, qui ad geometriam nati factive sint....

Nam quod dicunt asperitate aliqua, quæ in Euclidis elementis occurrit, excitari, non infringi adolescentum studia, tum id audirem, si quicumque ad geometriam accedunt, non modo ingenio bene instructi, sed optima, & obfirmata etiam voluntate accederent, nec inconstantia laborarent, quæ in illam ætatem cadit. Horum autem imbecillitati prospicere etiam velle, ecquis prohibeat? Sane per hosce annos, quibus hoc munere fungor, expertus sensi pleraque in primo limine theoremata intempestiva esse tironum ingeniis nondum subactis. Memini quantus illis terror inerat, cum sensim eos deducebam ad primas propositiones, quartam, quintam, sextam, septimam, & octavam in ordine Euclideo, quasi ve-

obra y de su método; asegurando, que si acaso Euclides se les resiste algun poco á los principiantes, por lo mismo es á propósito para explorar su talento, y dar á conocer aquellos pocos que nacieron, ó se criaron para geómetras....

Yo concedería que la dificultad de entender á Euclides, lejos de atrasar promueve los adelantamientos de los principiantes, si todos los que empiezan el estudio de la Geometría, le empezaran, no solo dotados de buen talento, mas tambien con voluntad muy resuelta, y no adoleciesen de la inconstancia tan propia de la poca edad. Pues aun quando concurrieran en los principiantes estas circunstancias ¿qué mal habria en allanarles el camino? Puedo asegurar que desde que enseño me ha manifestado la experiencia, que la mayor parte de los primeros teoremas no son proporcionados á la capacidad de los principiantes todavía poco egercitada. Tengo presente, que quando les iba encaminando poco á poco á las primeras proposiciones, quarta, quinta, sexta, séptima, y octava por el orden de Eucli-des mismas curvas escribió Apolonio, Matemático Griego.

Que Newton se arrepintiese de haberse engolfado en los métodos analíticos antes de poseer el Euclides, esto podrá

vero offendissent immanes scopulos acroceraunia. Audierant etiam hisce locis naufragia multorum; pontem esse male ominosum pluribus; hunc transmeare paucis concessum. Sane, nisi ardentius institissem, jam pedem retulissent plerique.

Hæc ego offendicula, merasque præstigias præpostero elementorum ordini semper tribuendas duxi, quem non alium observari ab Euclide prospexi, quam qui rigidum geometram deceret, quique idoneus esset, ut alia ex aliis inter se apta, & connexa deducerentur theoremata, ad demonstrandum satis, ad docendum parum. Quod nisi etiam à sapientissimis hujus ævi geometris sæpius observatum legissem, vix dicere auderem. Nam illa ipsa, quæ adeo exanimant adolescentes, theoremata nihil quidquam difficultatis haberent, si à simplicioribus theorematis sensim progressi, mentem, ac phantasiam paulo ante exercuissent tot angulis concipiendis, atque inter se comparandis. Quid? To-

des, les entraba siempre el mismo terror que si hubiesen tropezado con escollos muy espantosos. Tambien habian oido decir que en las mismas proposiciones se habian atascado muchos, siendo para muchísimos una puente azarosa, que muy pocos lograban pasar. Y seguramente, á no animarles yo con la mayor eficacia, los mas se hubieran aburrido.

Siempre he creido que estos tropiezos, y pura facinacion, son efecto de la mala colocacion de las proposiciones de los Elementos, en cuya coordinacion he reparado que Euclides solo buscó el método que correspondia á un matemático riguroso, de manera que los teoremas quedaran muy enlazados unos con otros, cuyo método basta sin duda para demostrar, pero no sirve para la enseñanza. Y á no ser que los matemáticos mas acreditados de estos tiempos han puesto ya esta tacha á la obra de Euclides, me guardara yo muy bien de decir mi parecer. Y de hecho, las mismas proposiciones que tanto molestan á los muchachos, se les harian muy fáciles de entender, si empezando por las mas sencillas, fuesen exercitando poco á poco su entendimiento y fanta-

Digitized by Google

drá probar quando mas que aquel gran varon sentia, dice Wolfio, no haberlos leido con la correspondiente madurez, pues refiere su historiador que por hacérsele muy fá-

Totus quantus est Euclidis liber secundus quam molestus accidat Tironibus nemo non videt. Sin autem illa rectangulorum, & quadratorum ex variis linearum segmentis objecta species in alium locum opportunius rejecta fuisset, eorum phantasiæ non adeo vel impedita, vel obscura videretur. Nihil opus est reliquos libros commemorare.

Quod si qua ratio est terroris hujus vel tollendi prorsus, vel minuendi, quid est cur nolimus eorum, qui geometriæ posthac daturi sunt operam, vel laborem levare, vel fastidio occurrere? Qua in re habeo non adstipulatores solum, sed auctores etiam huius meæ sententiæ scriptores ferme omnes, Italos, et Transalpinos, qui mihi multo ante præiverunt. Neque vero putandi sunt temere id fecisse, ac de gradu suo, quem Euclidi tot sæculorum consensus firmaverat, illum dimovisse. Nihil profecto minus. Perfectum geometram, et cui nihil admodum desit, Euclidem facile prædicant. Sed valeat primo il-

tasía, acostumbrándose á considerar primero, y comparar unos con otros tantos ángulos. ¿Habrá acaso quien no confiese que todo el libro segundo de Euclides es trabajosísimo para los principiantes? El qual ninguna fatiga les costaría si se hubiese dexado para mas oportuno lugar la consideracion de aquellos rectángulos y quadrados formados de varios segmentos de lineas No digo nada de los demas libros.

Y si hay algun medio de curar del todo, ó minorar por lo menos este terror ¿qué razon habrá para que dexemos de aliviar el trabajo, y precaver el aburrimiento de los que en adelante quisiesen dedicarse al estudio de la Geometria? Y en esto tengo no solo por garantes, mas tambien por autores de mi dictamen quasi todos los escritores Italianos y Ultramontanos, que escribieron mucho antes que yo, los quales no hemos de pensar que lo hiciesen por capricho, ni con el intento de derribar á Euclides del alto lugar en que le tenia asegurado el consentimiento de tantos siglos. No por cierto. Todos confiesan unánimes que es Euclides un geómetra perfecto y cabal. Pero tengamos presen-

Digitized by Google

fáciles, se desdeñó de estudiarlos. De aquí no se puede inferir que los tuviese en mas estimacion que otros elementos; se arrepintió de no haber estudiado los de Eucli-

 des,

illa Marcii Tullii libera vox. Nihilne tot seculis, summis ingeniis, maximis studiis explicatum putamus? Nihil est ergo actum post Euclidem?

Nam quod dicunt à rigida demonstrandi ratione eos desciscere, qui Euclidæo ordini mancipati non sunt, probarem utique, si hunc scopulum caute jam prætergressi non fuissent doctissimi geometræ: quasi vero iisdem principiis in dispari scribendi methodo et primi et postremi insistere non potuissent. Fuerit ista sane quorundam scriptorum labes, qui, dum perspicuitati plus nimio indulgent, geometriam, vel sustulerunt, vel enervarunt; nec vero alii defuerunt, qui studio rigoris, quem vocant, in demonstrando aliò prolapsi, geometriam studiosis velut onus ætna gravius effecerint. Si quis vero in hoc Euripo constitutus tanquam medius inter duas syrtes naviget, utriusque facultatis particeps, neutrius periculi expers, næ ego illum et optimi doctoris, et egregii geometræ partes omnes exsequi judica-

sentes estas palabras de Ciceron: ¿Qué? no se ha adelantado nada en el discurso de tantos siglos, con el talento y la aplicacion de tantos hombres? Nada se ha añadido á lo que dexó Euclides?

Decir que se apartan del método riguroso de demostrar los que no se sujetan al orden de Euclides, es hablar sin fundamento, porque prueban lo contrario los escritos de grandes matemáticos; siendo constante que sobre unos mismos principios se pueden fundar métodos muy distintos de hacer patente la verdad. No se puede negar que ha habido geómetras, que con el fin de aclarar los elementos mas de lo que podian han incurrido en el vicio de aniquilar, ó desfigurar la geometría; pero tambien ha habido otros, que por nimiamente adictos á lo que llaman rigor geométrico, han seguido otro rumbo, y han puesto la geometría de modo que es inasequible para los principiantes. Si hubiere alguno que en esta contrariedad de pareceres supiere tomar un medio término, de suerte que juntando lo bueno de cada uno, huyere de los inconvenientes de ambos, se le podrá tener segurades, pero no de haberles preferido otra Geometría elementar.

Pero aun quando los Elementos de Euclides merecieran

cabo; quod ætate hac nostra cum ex transalpinis hominibus multi, tum etiam ex nostris non pauci magna cum laude perfecerunt. Et quamvis is ego non sim, ut tantum possim, nec, si maxime possim, prædicare de me audeam; malo tamen cum iisdem scriptoribus parum timidus videri in hac eadem geometriæ semita ineunda, quam nimium prudens Euclidæis quasi vestigiis persequendis.

ramente por excelente maestro y esclarecido geómetra, conforme lo han conseguido con mucha felicidad en estos tiempos muchos matemáticos estrangeros y algunos nacionales. Aunque yo no me lisonjeo de tener igual fortuna, y tampoco lo diria aun quando lo conociera, sin embargo, mas quiero que se me gradúe de algo arrojado por seguir las huellas de estos escritores, que no de nimiamente detenido por no atreverme á apartarme de Euclides.

En el Prólogo del tomo III. de sus Elementos dice el P. Gherli lo siguiente.

Quantunque però il metodo d'Euclide sia stato, e sia tuttora comunmente abbracciato, perchè mai punto si scosta dal più severo rigor geometrico, di cui è proprio il dare alla mente giustezza, regola, e precisione; pure perchè l'ordine delle cose ivi è continuamente interrotto, al che devonsi attribuire a parer mio le insuperabili difficoltà che la maggior parte degli studiosi arrestano sul bel principio, ho io giudicato bene scostarmene senza per altro intermetter mai l'inviolabil legge di dimostrare per agevolar loro la strada all' acquisto di

Aunque el método de Euclides ha sido y es todavia comunmente adoptado, porque jamas se aparta del método geométrico mas riguroso, cuya circunstancia esencial es dar al entendimiento exâctitud, regla y precision; sin embargo porque interrumpe continuamente el orden de las cosas, á lo que deben atribuirse en mi entender las insuperables dificultades que paran á la mayor parte de los principiantes, he tenido por acertado no seguirle, bien que sin quebrantar jamas las leyes de la demostracion, á fin de allanar el camino á los que quisieren dedicarse á esta sublime necesaria ciencia; y con adop-

Digitized by Google

ran la preferencia respecto de los tratados que han compuesto de Geometría elemental los Matemáticos modernos, no obstante que no han tenido los mas de ellos otro maestro que el mismo Euclides; pide discernimiento la eleccion entre los muchos que se han publicado. Los mas solo po-

adoptar (conforme lo han practicado otros antes de ahora) el método mas obvio y natural, por el qual de las nociones mas sencillas se pasa á los teoremas de mayor dificultad, y mediante una continuada cadena, por decirlo así, he procurado quitar la obscuridad, y hacer de facil acceso aquellas proposiciones que en Euclides son el escollo de los muchachos, aunque de mas que mediana capacidad. Así me ha parecido que encaminaría por un camino mas facil y breve á los principiantes al conocimiento de los mas ocultos arcanos de esta ciencia, y lograría atajar su natural instabilidad y ligereza, que con inquieta inconstancia los mueve á cansarse y disgustarse luego de todo; siendo cierto que la extremada proligidad, sobre ser molesta para los mozos de talento, no alivia á los que son de cortos alcances.

di questa sublime necesaria scienza, e con appigliarmi (lo que prima di me da altri gia è stato praticato) all' ordine più ovvio, e naturale, in cui dalle più semplici nozioni si passa ai più difficili teoremi con una per cosi dire, perpetua concatenazione spogliare dell' oscurità, e arduo loro accesso quelle proposizioni, che in Euclide servon di scoglio agli ingegni eziandiò più, che mediocri. Con ciò ho pensato di condurre con maggiore facilità, e speditezza, ne' più occulti recessi di questa scienza i giovani, e per tal modo remediare all' innata loro instabilità, e debolezza, che con inquieta inconstanza li porta a infastidirsi, e annojarsi presto di tutto; essendo ben certo, che la superflua prolissità mentre agli ingegnosi è molesta, ai tardi non giova.

Emerson en sus *The Elements of Geometry. In wich the principal propositions of Euclid, Archimedes, and others, are demonstrated after the most easy manner. To wich is added a colection of useful Geometrical problems.* Londres 1763. un tomo en 8. habla en estos términos.

But Pe-podrán competir con las Geometrías escritas en estos últimos tiempos, en el concepto de algunos hombres que confunden una demostracion pesada con una demostracion rigurosa, ó creen que á una demostracion la falta de rigurosa todo lo que no la sobra de complicada.

II. Hemos dado el pie frances por término de compa-

But we are not to suppose that in these ancient times, this science was any thing near the perfection it its now in: but in succeding ages, men of great genius by their study and industry, by degrees added new improvements; till at last it arrived at the pitch we now see it. So that we need not wonder that Euclid, or even Archimedes, have taken round about method in demostrating many of their propositions, wich are now done vastly shorter and clearer. For it cannot be denied, that Euclid's elements abound with a great many trifling propositions, wich are of no other use but to demonstrate, in is way, the propositions that follow after. But they are disposed in no proper order or method. For he frequently treats of different subjects, promiscuously together, in the same place; without any regard to the nature of thin-

Pero no hemos de creer que en aquellos tiempos antiguos estuviese tan adelantada esta ciencia (la Geometría) como ahora, sino que en los siglos siguientes hombres de gran talento la fueron perficionando con su estudio y penetracion, hasta que por último llegó al grado de perfeccion en que está hoy dia. Por lo que no es de estrañar que Euclides y Archimedes usasen de rodeos para demostrar muchas proposiciones que los modernos demuestran con mas brevedad y claridad. De suerte que no se puede negar que en los Elementos de Euclides hay muchísimas proposiciones inútiles, que solo sirven para demostrar, siguiendo su plan, las proposiciones que se siguen despues. Pero no están colocadas por el orden, ni con el método correspondiente: porque trata con frecuencia en un mismo lugar asuntos diferentes, mezclándolos sin eleccion, y sin atender á la naturaleza de las cosas, ni al enlace de unas con otras; y

Digitized by Google

paracion de todas las medidas de distancias, por haberle grangeado esta prerogativa el gran número de estuches de Matemática Franceses que se han distribuido en Europa, y

c 4 traen

things, or their connection with one another. And as often, haste same subject to consider in different places; wich can breed noting but confusion. But there are likewise a great many propositions in the present system of geometry, wich these ancient mathematicians knew nothing of; and wich are equally useful with those of Euclid.

y tambien suele tocar un mismo punto en distintos lugares; siendo patente que de aquí no puede originarse sino confusion.

Ultimamente Thomas Simpson compuso para facilitar el estudio de las Matemáticas una Geometría Elemental con este título: *Elements of geometry; with their application to the mensuration of superficies and solids, to the determination of the maxima and minima of geometrical quantities, and to the construction of a great variety of geometrical problems.* En la tercera edicion de esta obra, que es del año de 1768, añadió su autor una vindicacion con el título de *Notes geometrical and critical on the elementary part of this work*, con el intento de satisfacer los reparos que puso á su Geometría Roberto Simpson, el qual habia publicado una edicion de los Elementos de Euclides. Al mismo tiempo que Thomas Simpson defiende sus Elementos de Geometría, hace tambien patentes los defectos de los de Euclides, y prueba 1.º que faltan en los Elementos del Matemático Griego muchas proposiciones necesarias: 2.º que su modo de presentar varias proposiciones necesita de mejorarse; 3.º que deben desecharse por viciosas algunas de sus definiciones, y 4.º que, sea culpa suya, ó de algun editor poco diestro, tienen varias demostraciones defectuosas.

Para que sepan mis lectores qual de estos dos Ingleses es voto de mayor peso, les diré que Thomas Simpson ha dado tales muestras de inventiva en diferentes obras, donde trata con novedad muchísimos asuntos de Ma-

Digitized by Google

traen todos un tanto del expresado pie. La toesa, que de él se deriva, es dias ha la medida mas conocida y usada de los Matemáticos (8), por haberse egecutado con ella la

Matemática Pura y Mixta, que ha merecido lugar entre los primeros Matemáticos de esta era; que con el don de invencion juntaba mucho método y suma claridad, de modo que entre los pocos escritos Ingleses que he manejado, ningunos conozco que en esta parte puedan competir con los suyos. De Roberto Simpson no conozco mas (y dudo que haya otra cosa) que una edicion de los Elementos de Euclides, un tratado de secciones cónicas por el método syntético, y un tomo de Opúsculos publicado despues de su muerte habrá tres, ó quatro años, que hasta ahora no ha llegado á mis manos.

(8) Wolfio tom. I. de su Curso, pag. 99.

Mensuræ longitudo et divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias, præter Willebrordum Snellium, exponunt Ricciolus, Malletus, Eisenschmidius, aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat tabula sequens in particulas istiusmodi, qualium pes Regius Parisinus est 1440.

La extension y division de la medida no es una misma en todas las Naciones. Villebrod Snellio, Riccioli, Malet, Eisenschmid, y otros traen la diferencia que va de unas á otras, que nosotros, por lo que toca á las mas conocidas, señalamos en la tabla siguiente, comparándolas con el pie de Rey de París que consta de 1440 partes.

Lecchi tom. 1. de sus Elementos de Geometría, pag. 16.

Porrò hæ mensuræ incertæ sunt, nisi pedis quantitas, ad quam illæ referuntur, fuerit determinata. Pes verò tot prope magnitudines sortitur diversas, quot sunt civitates; quare, ut hæc tanta, quæ in legendis scriptoribus occurrebat, obscuritas tolleretur, Recentiores optimum factu censuerunt mensuras reliquas ad

No se puede saber á punto fixo el verdadero valor de estas medidas, á no ser que primero se determine el valor del pie, del qual se derivan. Y como hay quasi tantos pies diferentes quantas son las Ciudades, los modernos han tenido por cosa muy acertada, con el fin de obviar la confusion que de aquí se originaba en los escritos ma-

Digitized by Google

la operacion geométrica mas celebrada de quantas duran en la memoria de los hombres; no solo la han usado los Franceses para medir grados del meridiano terrestre en Euro-

ad notam quantitatem pedis Regii Parisiensis referre.... et earum mensurarum, saltem celebriorum varietates repræsentare in particulis istiusmodi, qualium pes Regius Parisinus est 1440.

matemáticos comparar las medidas de todas las Naciones con el pie de Rey de París, cuyo valor es conocido.... expresando la diferencia que va de unas á otras, á lo menos respecto de las mas usadas, en partes de dicho pie, que consta de 1440.

Michelotti, Profesor de Matemáticas en la Universidad de Turin, pag.3. del tomo primero de sus experimentos hidráulicos, publicado en aquella Corte el año de 1767, dice:

Per codesto motivo ancora nel corso dell' opera non ci vagliamo daltra misura, che del piede, e della tese di Parigi, come la più nota a geometri d'Europa; e percio di più facile riduzione alla misura particolare d'ogni paese.

Este es tambien el motivo por que en el discurso de esta obra no usamos otra medida que el pie y la toesa de París, por ser la mas familiar á los geómetras de Europa, y por lo mismo mas facil de reducir á la medida particular de cada pais. Lo propio dice pag.199.

El P. Gherli tomo I. de sus Elementos de Matemática, pag. 269.

Per mettere la materia in tutto il lume possibile non solo parlerò dei pesi, e delle misure delle diverse principali nazioni, e della proporzione, che in qualunque sito hanno osservato, e osservanno fra loro questi pesi, e queste misure, ma in oltre ridurrò dipoi e gli uni, e le altre a una sola regola la più nota, e comune, che tale ho giudicato; e questa rispetto alle mi-

Con la mira de tratar este asunto (de pesos y medidas) con la posible claridad, hablaré no solo de los pesos y de las medidas de las principales naciones, y de la proporcion que han guardado y guardan entre sí en qualquier lugar, sino que despues reduciré tambien los unos y las otras á una misma medida que tengo por la mas conocida y general, la qual respecto de las medidas lineares, superficiales, y de cabida será el

Digitized by Google

ropa, Africa y América, sino que tambien á ella han reducido el resultado de sus operaciones el Abate Boscowich, el Abate Liesganig, y el P. Becaria, que han egecutado se-

misure tanto in lunghezza, come in superficie, e in capacità, sarà il pede reale di Parigi.

el pie de Rey de París.

Vito Caraveli en el tomo VII. impreso en 1771 de sus *Elementi di Matematica, composti per uso della Accademia Militare* 12. tomos en 8. sin el tomo segundo de Arquitectura Militar, que no se ha dado todavia al público, dice:

Per poter conoscere il rapporto delle nostre misure con quelle degli altri luoghi, soggiugniamo la seguente tavola, nella quale si trovano registrate le misure di più luoghi, rapportate tutte al piede di Francia con autorità regia stabilito come misura costante per tutta la Francia, detto perciò piede del Re, *e alla tesa, o pertica del Castelleto di Parigi, che costa di 6 piedi del Re; essendosi ormai tali misure rese universali tra' matematici, a cagione delle misure della terra fatte con esse.*

Para determinar la relacion entre nuestras medidas, y las de otras partes, añadimos la siguiente tabla, donde van apuntadas las medidas de diferentes Ciudades, todas comparadas con el pie de Francia que de orden del Rey rige en todo aquel Reyno, por cuyo motivo se llama *pie de Rey*, y con la toesa, ó percha del Chatelet de París, que consta de 6 pies de Rey, por haberse hecho universales estas medidas entre los Matemáticos con motivo de las mediciones de la tierra que con ellas se han executado.

En el Prólogo de los *Elementi dell'Artigleria composti per uso della Reale Accademia Militare*, publicados en 1773, dos tomos en 8. donde no usa otra medida que el pie Francés, dice:

Confesso finalmente che le misure per le construzioni de' cannoni, de' mortari, e della loro casse, mi sono state somministrate della sud-

Confieso finalmente que las medidas para la fundicion de los cañones y morteros, y la construccion de sus cureñas, me las ha dado la misma Academia,

Digitized by Google

separadamente la misma medicion en Italia, Ungria y Piamonte.

La determinacion del espacio que un cuerpo grave cayendo á impulsos de la gravedad anda en el primer segundo de su caida, la egecutó con el pie Frances el Olandes Huyghens; y con la misma medida determinó tambien la longitud del péndulo que señala los segundos de tiempo en la latitud de París.

Aun-

suddetta Accademia, dove si tengono fedelmente registrate.

mia, que las guarda con sumo cuidado.

Gerónimo Francisco Christiani, Ingeniero de la República de Venecia, pág. 10. de su obra intitulada: *Delle misure d'ogni genere antiche, e moderne con note letterarie, e Fisico Matematiche*, estampada en Brescia año de 1760: un tomo en 4. dice:

Fra le misure frattanto, cui in oggi ravvisiamo sotto il nome di piede, ed alla quale cedono tutte le altre unanimamente il primato, si è senza dubbio la misura del piede Reale di Parigi. *Non v'ha matematico, che di questo non faccia il maggior uso.*

Entre las medidas que hoy dia conocemos con el nombre de pie, todas ceden unánimemente la primacía al *pie Real de París*. No hay Matemático ninguno que no haga de ella muchísimo uso.

Allí mismo pág. 13.

Stabilitasi ora la vera, ed assoluta lunghezza del piede Reale di Parigi, e la di lui divisione, cui comunmente tutti i Matematici osservano di 1440 *punti, ó particelle Parigine, ci varremo istessamente noi di queste medesime, avendo a ridurre presentemente l'importare de' più celebri piedi si*

Despues de determinada la medida verdadera y absoluta del pie de París, y su division en 1440 puntos, ó partes, comunmente admitida de todos los matemáticos, de estas mismas nos valdremos para reducir al mismo pie de París los pies mas famosos, así antiguos como modernos, si-

Digitized by Google

Aunque hubiéramos podido reducir á vara, y partes de la vara muchas cantidades, cuya determinacion se hallará en estos Elementos, hemos omitido de intento esta reduccion para que sirva de egercicio á nuestros lectores, quienes la podrán egecutar á poca costa, una vez que hemos señalado la correspondencia entre el pie Frances, y el pie Castellano, ó la tercia de la vara de Burgos. Lo mismo hizo Newton siempre que se le ofreció hacer uso, ó memoria de operaciones hechas con la medida Francesa. Fuese reverencia, fuese escrúpulo, las dexó sin reduc-

si antichi, quanto moderni ad esso parigino piede, seguendo in ciò l'illustre esempio de' più diligenti scrittori in simile abbondevolissima materia.

siguiendo en esto el egemplo de los autores que con mas diligencia han escrito sobre esta abundante materia.

Ya dexaba dicho en su Prólogo

Non fu per vero grave, o laborioso impegno il trarre col tempo a fine il concepito mio lavoro. Molti, e molti autori hannoci lasciati spogli, compendi, e repertori, con copiosissime tavole d'estere misure. Come tra tutte, una però avene di maggior fama, ed uso al di su dell' altre, la quale in ogni tavola di misure viene più eminentemente collocata, così giudicai, che quante misure avvenissemi di raccorre, tornasse in acconcio con quella unicamente di confrontare. Tale misura, come di leggieri accorgesi, si è il piede Reale di Parigi.

No me ha costado mucho trabajo el llegar á la conclusion de esta obra, habiéndonos dexado muchísimos autores extractos, compendios y apuntaciones con tablas muy dilatadas de medidas estrangeras. Pero como entre todas hay una que se ha hecho mas famosa y usual que las demas, y es, conforme se echa de ver, el pie de París, la qual en todas las tablas de medidas ocupa el lugar mas eminente; con esta misma medida me ha parecido por lo mismo necesario comparar únicamente todas las medidas de que se me ofreciere hacer mencion.

Digitized by Google

duccion ninguna conforme las habian publicado sus autores.

Ultimamente, despues de maduro acuerdo nos pareció decoroso, quando no fuera obligacion, conformarnos con el mayor número de los escritores de Matemática, que confiesan ser el pie de Rey de París la medida á la qual se refieren todas las demas. Hanlo hecho para darse mejor á entender unos á otros, del mismo modo que sería mas facil la comunicacion entre las diferentes Naciones, si, á lo menos para el trato exterior, se convinieran en hablar todas una misma lengua.

Escusáramos esta adicion que algunos graduarán de apología, si tuviéramos seguridad de que solo Matemáticos de mediano conocimiento, por lo menos, hubiesen de registrar nuestra obra. Para con estos es por demas quanto digamos en nuestro abono, y de su misma inteligencia fiáramos nuestra disculpa, aun quando no tuviéramos que esperarla de su voluntad. Los que no están versados en estas materias tendrán lo que basta para oir con desconfianza á los que murmuraren de nuestro proceder, murmurado ya luego que salieron á luz unos tratados que nos encargó el Inspector General de la Infantería, por hombres que con su osadia en decidir, piensan que suplen la instruccion que tienen muy escasa.

NO-

Digitized by Google

NOTA.

Un número arábigo dentro de un paréntesis, como este (336) que se ve en el párrafo 374 del tomo tercero, quiere decir, que el fundamento de lo que allí se dice está en el párrafo 336 del mismo tomo.

Quando dentro del paréntesis hay un número romano antes del paréntesis como estos (II.91) y (I.531), que se ven en los párrafos 329 y 678 del tomo tercero, quiere decir, que lo que allí se dice vá fundado en el párrafo 91 del tomo segundo, y en el párrafo 531 del tomo primero.

ELO-

Digitized by Google

ELOGIO
DE D. JORGE JUAN,

COMENDADOR DE ALIAGA EN LA ORDEN DR S. JUAN, GEFE DE ESQUADRA DE LA REAL ARMADA, CAPITAN DE LA COMPAÑIA DE GUARDIAS MARINAS, CONSILIARIO DE LA REAL ACADEMIA DE S. FERNANDO, INDIVIDUO DE LA REAL SOCIEDAD DE LONDRES, Y DE LA ACADEMIA REAL DE BERLIN (1).

Si las alabanzas de los hombres hubieran de recaer en la duracion de su existencia, apuntaríamos con supersticiosa puntualidad desde los primeros renglones de este Elogio el dia, mes y año del nacimiento de D. Jorge Juan; diríamos, ó fingiríamos, que ya dió muestras en sus primeros años de lo que habia de ser en la edad adulta; y pintándole hombre quando era todavía niño, desluciríamos toda su vida para hacer mas portentosa su infancia. Quédese tanta proligidad para los investigadores de fechas; en la vida de un Filósofo no caben ficciones, ni tampoco menudencias, donde lo mas que se nos ofrecerá decir es memorable, todo es serio. El Elogio de D. Jorge Juan empe-

(1) Sé que tiene este ilustre varon en sus escritos mas que en los mios un monumento duradero de su memoria; pero he querido darle, aunque difunto, un testimonio de mi gratitud, porque fue voto, fue empeño suyo el que á mí se me encargara escribir estos Elementos de Matemáticas.

Digitized by Google

pezará donde él empezó á obrar : las obras son las que hacen señalados á los hombres ; con ellas arrancan aplausos á sus coetaneos , consiguen lugar en el templo de la fama , y dexan á la equitativa posteridad que agradecer y admirar.

No fundó D. Jorge Juan en la nobleza de su nacimiento un privilegio para vivir inutil ; antes porque nació distinguido quiso distinguirse por varios caminos , y merecer por sí lo que ya tenia de la casualidad. Por influxo de un tio suyo , Baylío de Caspe , entró en la Orden de S. Juan de Jerusalen , en una Orden donde la Religion hace piadoso el valor , y el valor animosa la piedad. El dilatado campo que esta carrera le proporcionaba donde egercitarse era muy ceñido para su espíritu , ni su pundonor consentia el que hiciese á su Religion el sacrificio de todos sus brios. Tenia una patria , tenia un Soberano , lo sabia ; sabia que primero que religioso era vasallo , y que las obligaciones de vasallo se compadecen con las de religioso , pues las impone muy estrechamente todas la verdadera Religion. Salió de Malta para España con voluntad resuelta de servir á S. M. en la Marina ; y desde su admision en el Cuerpo de Guardias Marinas se dedicó con tan egemplar y afortunada aplicacion al estudio de las Matemáticas , que á los veinte y un años de edad mereció ser preferido entre todos sus compañeros (2) para pasar al

(2) Fue tambien nombrado D. Antonio de Ulloa, Oficial del mismo Cuerpo, hoy dia Teniente General de la Real Armada.

Digitized by Google

al Equador con los Académicos Franceses que el Ministerio de aquella Nacion enviaba allá á una expedicion literaria tan importante como memorable. Tratábase de salir para siempre de dudas acerca de la verdadera figura de la tierra, que se tuvo por redonda hasta fines del siglo pasado. Parecióles á algunos Filósofos felizmente atrevidos que esta figura repugnaba con las leyes del equilibrio de los fluidos, y que la convexídad de la superficie de la tierra no podia ser una misma en toda su extension. Aunque desde el año de 1672 tenia esta sospecha en su abono una observacion muy sonada, no era suficiente este testimonio, y se hacia indispensable confirmarla con las operaciones de la Geometría. Es constante que si la tierra no es una esfera rigurosa, han de ser desiguales los grados de un círculo que nos figuremos la parta por medio, pasando por el Norte y el Sur, y que estos grados han de coger menos varas donde fuere mayor la convexídad, que donde fuere menor. Requería, pues, la determinacion cabal de la figura de la tierra que se midiesen dos de estos grados por lo menos, el uno en el Polo, el otro debajo del Equador, para inferir de su diferencia quánto la superficie de nuestro globo discrepa de la esférica, y saber á punto fijo á qué cuerpo se parece. En esta indagacion que ya se le hacia apreciable á D. Jorge Juan por ser su obgeto averiguar una verdad matemática, interesaban los progresos de la navegacion, y el concepto nacional, dos cosas cabalmente que fueron mientras vivió el

Digitized by Google

blanco de todos sus desvelos. Ufano de la preferencia que habia merecido entre muchos Oficiales ilustrados de su Cuerpo, pudiera discurrir que en la misma eleccion iba afianzada su suficiencia; pero auuque mucha la instruccion de D. Jorge Juan, y mayor de lo que requería la operacion á que se le enviaba, era todavia mayor su desconfianza; que con este nombre hemos de calificar su mucha modestia. Dedicóse con nuevo empeño al estudio, y hizo ver á los sabios Franceses, cuyo compañero era nombrado, que en una Nacion donde acaso no esperaban hallar hombres que los entendiesen, habia muchachos que podian auxîliarles, aun quando fuera mas dificultosa, y pidiera mas profunda doctrina la empresa.

Tenia en sí recursos D. Jorge Juan para dar vado á muchos encargos á un tiempo. Por varios é inconexôs que fuesen sus asuntos, su zelo patriótico sabia reducirlos á uno mismo, cuyo desempeño aseguraba de antemano su atinada actividad. Era tan sobresaliente en él esta prenda, que el Virrey del Perú, en cuyo Reyno se egecutaba la operacion matemática, le empleó en la defensa de algunas Plazas que recelaba fuesen acometidas de los Ingleses, en todo tiempo nuestros émulos, y entonces nuestros enemigos; en disciplinar las tropas de aquella costa, y en la construccion y mando de dos Fragatas, cuyo destino era impedir un socorro que el Almirante Anson esperaba para reforzar la esquadra con que iba fatigando en aquellas regiones remotas nuestra atencion, y nuestro comercio.

No

No bastaba haber concluido la medicion del grado del meridiano terrestre, era indispensable publicar individualizadas todas las observaciones, operaciones y tentativas, todos los cuidados, afanes y peligros á cuya costa se habia conseguido, y empeñaba esta publicacion en un trabajo de todo punto nuevo aun para un Matemático. No en todos se junta la soltura que dexa ayrosas las operaciones prácticas con el talento de referirlas, y hacer patente, quando no son mas que preliminares, su enlace con el obgeto principal; saber obrar, y saber decir son talentos muy distintos, pero en D. Jorge Juan parecian uno mismo. Traía á su vuelta de América todos los materiales de sus observaciones astronómicas y fisicas para darlas con algun sosiego toda la coordinacion y pulimento que cabia en la materia, ó lo que era uno mismo, el que él podia darlas. No era esta una dificultad para D. Jorge Juan, antes era una diversion; otros estorbos le esperaban capaces de apurar su constancia si hubiera sido vulgar. Halló á su regreso á España muerto al Ministro que le habia enviado á América, era lo mismo que hallar mudada la Corte, y sus proyectos sin valedor. Para que estos llegasen á la noticia del nuevo Ministro, hubo de acudir al empeño; fue oido, pero despachado como si solicitara algun premio. Estuvo para desmayar D. Jorge Juan, y cabe esta confesion en su elogio; no es flaqueza, es virtud desmayar por tan honrado motivo. Lo dexara todo para irse á Malta, si no le alentara, ofreciéndole interesar al Ministro un hombre á quien una expedicion desgraciada tiene señalado lugar en nuestra historia (3). Con este influxo lograron sus intentos el patrocinio que necesitaban para efectuarse, y se imprimió á costa del Real Erario la obra de las Observaciones Astronómicas y Físicas (4): no pedia otro galardon el desinterés de su autor.

La misma ansia con que le habia solicitado, despertó en su corazon naturalmente agradecido sentimientos de afecto ácia el Ministro por cuya mano pasó esta merced, y tuvo el Ministro la fortuna de conocerlo. Desde entonces la vida de D. Jorge Juan no fue mas que una continuacion de comisiones y confianzas, todas dirigidas al servicio del Rey, y la mayor prueba de que las desempeñaba es que se continuasen. Pasó á Londres con un encargo que sobre pedir luces (á D. Jorge Juan no se le podian dar otros), requería no poca maña, y tambien astucia: construc-

(3) D. Josef Pizarro, que murió en Cadiz siendo Teniente General de Marina.

(4) *Observaciones Astronómicas y Físicas, hechas de orden de S.M. en los Reynos del Perú, de las quales se deduce la figura y magnitud de la tierra, y se aplica á la navegacion*, impreso de orden del Rey nuestro Señor en Madrid por Juan de Zúñiga, año de 1747, un tomo de á 4.

La parte histórica de la Expedicion la escribió D. Antonio Ulloa, y salió á luz con este título: *Relacion Histórica del Viage á la América Meridional, hecho de orden de S.M. para medir algunos grados de meridiano terrestre, y venir por ellos en conocimiento de la verdadera figura y magnitud de la tierra*, impresa de orden del Rey nuestro Señor en Madrid por Antonio Marin, año de 1748.

Digitized by Google

truccion de navios, obras hydráulicas, beneficio de minas, liga y afinacion de monedas, para todo se le consultaba; ó porque habia un D. Jorge Juan de quien fiarlo, todo se emprendia.

Era tanto su deseo del acierto, que estaba en una continua desconfianza de sus muchas noticias y su penetracion. No daba en el arrojo de aquellos sabios que con el discurso quieren adivinar y tambien violentar las operaciones de la naturaleza; siempre que el asunto lo permitia la preguntaba, no perdonando para ilustrarse ni observacion ni experimento. Rayaba ya en temeraria escrupulosidad su esmero, y estuvo para perecer en unas pruebas que hacia para averiguar la resistencia de las jarcias; salvóle la casualidad de cubrir la marea las rocas, adonde le arrojó una jarcia que se rompió, pero quedó muy maltratado y con riesgo de la vida algunos dias.

Solo un Oficial que tantas y tan varias pruebas tenia dadas de cumplido, podia saber las circunstancias que acreditan este honroso concepto, guiar á los que deseasen merecerle, é infundir tan noble deseo en los que hubiesen entrado sin vocacion en la Marina. De estos no hablára un escritor pusilánime, antes daría á entender, ó diria sin rubor que todo es pundonor, todo zelo, todo suficiencia, todo aplicacion, todo idoneidad en un hombre que viste uniforme; y socolor de hacer justicia á todo un Cuerpo, haría, envileciéndose á sí mismo, un agravio á los individuos beneméritos que mantienen su opinion y su esplendor.

dor. No será estraño que haya entre los Oficiales algunos incapaces quando muchos entraron sin eleccion propia en la carrera Militar; eligiéronla sus padres para darles acomodo, y no defensores á la patria: qual un hombre codicioso dedica sus hijos á la Iglesia para conseguir ó poseer ricas prebendas, no para que tenga la Religion Ministros que con su doctrina la defiendan, y el Sacerdocio individuos que con su buen egemplo le hagan mas venerable. Solo á D. Jorge Juan podia fiarse el plantel de los Oficiales de Marina, solo él podia gobernar con éxîto cabal la Academia donde adquieren los conocimientos que les servirán para arrostrar los mayores peligros, y dexar burlada la furia del inconstante elemento, que tanto egercicio dará algun dia á su inteligencia y su valor. Notorios son los progresos que ha hecho la Academia de Guardias Marinas desde que se encargó su gobierno á D. Jorge Juan: maestros, discípulos, libros, instrumentos todo es sobresaliente y exquisito desde entonces. Sus individuos perfeccionan dias ha con sus observaciones y viages la Astronomía y la Navegacion en competencia de los mayores Astrónomos estrangeros.

Era destino de D. Jorge Juan no estar parado, así como era genio suyo no estar ocioso. No bien se le acababa de encargar la direccion de la Academia de Guardias Marinas, quando se le dió orden de ir al Ferrol para dirigir las obras que se hacian en aquel puerto, donde á la sazon estaban trabajando quince mil hombres. Su modestia, su

amor

Digitized by Google

amor á lo que en Cadiz tenia á su cuidado repugnaban tan vasta comision, porque no le dominaba el furor de tener muchos asuntos entre manos, ceñíase su ambicion á concluir los que tenia empezados. Se le admitió que fuese al Ferrol por una temporada; y dexando allanadas varias dificultades á que habia dado motivo así la fábrica como la construccion, pasó á Santander, donde dexó corriente un nuevo método de aparejar los navios, que ya se habia experimentado con total felicidad en el Ferrol.

Restituido á Cadiz se empleó con su acostumbrado zelo en cuidar de su Compañía, donde brotaban ya las semillas de la sólida instruccion que dexó sembradas antes de *salir* para Galicia. Los ratos que le dexaba esta ocupacion, los ocupaba en promover diferentes ramos de las Ciencias Naturales, estimulando á lo mismo varios sugetos en quienes conocia disposiciones para seguir su egemplo. Formó una Sociedad de hombres aplicados é instruidos que se juntaban todos los jueves en su casa; allí se leían disertaciones, controvertian puntos de todas las Ciencias que son del distrito del discurso humano, y pueden contribuir al bien de los hombres. Formóse una República literaria, cuyos dominios alcanzaban toda la naturaleza, no habiendo entre sus individuos mas desigualdad que la que requería la universal instruccion de D. Jorge Juan, quien con título de Presidente la gobernaba, porque ninguno le era estraño de quantos idiomas en ella se hablaban.

Digitized by Google

Los que no han tratado mas que hombres vulgares, ciñen á sola una clase de dependencias los aciertos del hombre, y tienen por incompatible el estudio con la destreza de un negociador. Por otra parte los literatos creen que solo ellos son para todo, y que los libros infunden el don de no errar en nada. La verdad es que un hombre ignorante es un hombre inutil, y tambien peligroso si tiene autoridad; y un sabio sin trato de gentes suele ser un hombre sin crianza, y un niño en las dependencias. D. Jorge Juan era sabio y hombre de mundo á un tiempo; para él podia haber asuntos nuevos, pero no estraños; los concluía todos como si no hubiese manejado otros en el discurso de su vida, y así lo acreditó en su Embaxada en la Corte del Rey de Marruecos.

Entre tantos monumentos que dexó D. Felipe V. de su paternal amor á sus vasallos, hay uno en la Capital de esta Monarquía, cuyo destino es proporcionar á la noble juventud una crianza qual corresponde á su calidad, ó á los servicios que debe esperar la Nacion de los hombres de esfera distinguida. Sabia aquel Monarca tan cuerdo que á los vasallos de ilustre nacimiento toca dar á los demas el egemplo de todo lo bueno, y conocer todo lo util para saberlo apreciar, y promoverlo con su patrocinio, quando no con su generosidad. Una revolucion inesperada dexó al Real Seminario de Nobles sin gobierno, ó sin Director, sin enseñanza, ó sin Maestros. El Rey, heredero de las intenciones igualmente que de las virtudes de

su

su Augusto Padre, encargó la direccion de tan esencial establecimiento á D. Jorge Juan. Jamas hubo eleccion tan aplaudida, porque nunca la hubo mas acertada; la fama del nuevo Director pobló en poco tiempo de Seminaristas el Seminario: su discernimiento supo hallar para todo Maestros, y deseando mejorarles, si cupiese, les señaló sueldos que bastasen á su decente manutencion. Mudaron muy en breve de semblante la crianza civil y literaria en aquel Colegio, donde se forman desde entonces Caballeros ilustrados, y con modales; cediendo, como corresponde, el primer lugar la crianza civil á la christiana, sin la qual suele ser la política hypocresía, y una arma peligrosa la ilustracion.

En medio de la continuada agitacion con que vivió D. Jorge Juan desde su vuelta de Inglaterra, pues son mas de veinte y quatro los viages de un extremo de España á otro que de orden de la Corte emprendió, iba trabajando una obra (5) que pedia repetidos experimentos, cálculos prolijos, y mucha combinacion; en una palabra, sumo sosiego. Como no habia perdonado diligencia para instruirse, tenia leído quanto se habia publicado sobre la construc-

(5) *Exámen Marítimo Teórico-Práctico, ó tratado de Mecánica, aplicado á la construccion, conocimiento, y manejo de los Navios, y demás Embarcaciones. Por D. Jorge Juan, Comendador de Aliaga en la Orden de S. Juan, Gefe de Esquadra de la Real Armada, Capitan de la Compañía de Guardias Marinas, Individuo de la Real Sociedad de Londres, y de la Real Academia de Berlin,* dos tomos de á 4. en Madrid en la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, 1771.

Digitized by Google

truccion y el manejo del Navio. El fruto que sacó de tanta letura fue dudar y sospechar que á pesar de su gran penetracion y profunda geometría, se habian equivocado los Matemáticos de primera gerarquía que probaron sus fuerzas en tan ardua materia. Empeñóse en averiguar si eran fundadas sus sospechas, y fue lo mismo que tratar el asunto de propósito. No le hay mas dificultoso en toda la Matemática mixta.

Es el Navio la máquina mas portentosa que han inventado la industria y codicia de los hombres; para su manejo han de obrar una infinidad de máquinas con tan extremada precision y concierto, que de atrasarse ó anticiparse un instante una maniobra pende el destino de la nave; está al arbitrio de dos elementos de extraordinaria inconstancia y violencia, cuyo modo de obrar en una embarcacion está todavía por saberse. Este es no obstante el primer paso que debe darse en la Ciencia Naval, este es el primer punto en que D. Jorge Juan se aparta de los autores que trataron el mismo asunto. Todos los que han escrito del impulso de los fluidos en los sólidos, atienden en su determinacion á la superficie no mas del sólido chocado, sin llevar en cuenta la cantidad que el sólido chocado está metido en el fluido. Pero si los fluidos pesan, dice D. Jorge Juan, quanto mas alta fuere la columna del fiuido que choca con el sólido, tanto mayor será la eficacia del impulso. De esta consideracion tan natural saca D. Jorge Juan consecuencias muy importantes acerca de

la

Digitized by Google

la resistencia que el agua opone al movimiento del Navio.

Todos los demas puntos en que estriba su perfecta construccion, todo quanto pertenece á sus diferentes partes, está tratado con particular maestría. Pero como su fin principal fue dar reglas que tuviesen en la práctica aplicacion, ó pudiesen practicar los rudos Marineros, puso al fin de su tratado un resumen de todas las determinaciones que con el socorro del cálculo habia conseguido. Escusára esta recapitulacion si llevára solo la mira, como otros muchos, de hacer alarde de gran calculador. Eralo sin duda, pero en su Exámen Marítimo lo fue por necesidad, para salir (es expresion suya) del laberinto de escollos sobre que caminaba. Despues de guardar á la verdad el debido miramiento, quiso sacarla de entre los abrojos, donde pocos se hubieran arriesgado á buscarla.

En los mas de los hombres hay robustez para aguantar mucho tiempo sin detrimento de su constitucion una continuada contencion de ánimo, ó fatiga corporal, pero las dos juntas han de rendir muy pronto la naturaleza mas robusta, y así fueron minando insensiblemente la de D. Jorge Juan. Padecia de algunos años atrás insultos de un cólico bilioso, acompañado de tan perversos accidentes, que era facil de pronosticar el paradero de su frecuencia. Su consuelo en estos lances le hallaba en su conformidad christiana, y su alivio en los ayres nativos; que aun para recobrarse habia de perder el descanso. Venció por último la obstinada y cruel dolencia llevándose á

D.

Digitized by Google

D. Jorge Juan quasi de repente á los sesenta años cumplidos de su edad.

Fue de estatura y corpulencia medianas, de semblante agradable y apacible, aseado sin afectacion en su persona y su casa, parco en el comer, el igual de sus subalternos, el amigo de sus criados, y por decirlo todo en menos palabras, sus costumbres fueron las de un Filósofo Christiano. Quando se le hacia alguna pregunta facultativa, parecia en su ademan que era él quien buscaba la instruccion. Si se le pedia informe sobre algun asunto, primero se enteraba, despues meditaba, y últimamente respondia. De la madurez con que daba su parecer provenia su constancia en sostenerle; muy distinto de aquellos contemplativos que vacilando entre la ambicion y la esperanza nunca tienen dictamen propio, y sacrifican constantemente á respetos humanos su razon. No apreciaba á los hombres por la Provincia de donde eran naturales; era el valedor, quasi el agente de todo hombre util. Miraba no con desprecio (en él no cabia), sí con lástima á muchos Españoles de corazon tan ceñido, como limitados de entendimiento, que no conocen mas patria que la Ciudad, la Villa, la Aldea, el rincon donde nacieron; y aunque natural del Reyno de Valencia, no era Valenciano, era Español.

ER-

Digitized by Google

ERRATAS.

Pag.	Linea.	Dice.	Léase.
10	15	653	953.
12	8	como menor de una unidad	como una unidad menor.
46	17	$\frac{8}{8}$	$\frac{18}{8}$.
47	ult.	quisiere	quisiera.
51	13	(71)	(70).
52	11	fuere 3	dieren 3.
211	9	abaxo que	abaxo de.
312	16	si la una	si una.
343	10	triangulares	triángulos.
379	12	*Qr*	*Qx*.
470	ult.	*Ko* mayor que	*Ko* que.
476	10	de grado y $\frac{1}{12}$	y $\frac{1}{12}$ de grado.
477	26	*AnC*	*AmC*.
480	4	*CF*	*DF*.
505	ult.	*CAC*	*CAD*.

Digitized by Google

INDICE

De lo que contiene este Tomo.

Mul-

Digitized by Google

De

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTOS DE ARISMÉTICA.

Nociones preliminares que declaran la naturaleza y las diferentes especies de los Números.

1 LLámase, en general, *cantidad* todo lo que es capaz de aumento ó diminucion, ó todo lo que puede ser mayor ó menor, como la estension, la duracion, el peso &c. La cantidad es el obgeto de las Matemáticas; pero como esta ciencia considera la cantidad espresada de varios *modos*, *de aquí* proviene la diferencia de los muchos ramos que esta facultad abraza. El ramo que considera la cantidad en quanto es espresada por los números, se llama *Arismética*.

2 Es pues la Arismética la ciencia de los números: considera su naturaleza y sus propiedades, y suministra medios fáciles, así para representar los números, como para componerlos ó resolverlos, que es lo que llamamos *calcular*.

3 No es posible hacerse cargo de lo que son los números, sin saber primero qué cosa sea lo que llamamos *unidad*.

4 Es la unidad una cantidad que se toma (las mas veces á arbitrio) para que sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de una misma especie:

Digitized by Google

así quando decimos de un cuerpo que pesa *cinco* libras, la libra es la unidad, esto es, la cantidad con la qual se compara el peso de dicho cuerpo; se hubiera podido tomar igualmente la onza por unidad, en cuyo caso *ochenta* hubiera representado el peso del mismo cuerpo, porque, segun se verá mas adelante, cinco libras componen ochenta onzas.

5 El número espresa de quántas unidades ó partes de la unidad se compone una cantidad.

Si una cantidad consta de unidades enteras, el número que la espresa se llama *número entero*: si se compone de unidades enteras y de partes de la unidad, se llama *número fraccionario*; y si solo consta de partes de la unidad, se llama *fraccion* ó *quebrado*: *tres* y *medio* forman un número fraccionario: *tres quartos* componen un quebrado.

6 Llamamos *número abstracto* todo número que pronunciamos sin determinar la especie de las unidades de que se compone; así *tres*, ó *tres veces*, *quatro*, ó *quatro veces* son *números abstractos*; pero si al pronunciar un número tambien se espresa la especie de las unidades que le forman, como quando decimos *quatro pesos*, *seis hombres*, el número se llama *concreto*.

De la Numeracion.

7 La numeracion es el arte de espresar todos los números con una cantidad limitada de nombres y caracteres. Estos caracteres se llaman *guarismos*.

8 Los caracteres de que se usa en la numeracion actual

Digitized by Google

tual y los nombres de los números que representan, son como se sigue

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero	uno	dos	tres	quatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve.

Para espresar con estos caracteres todos los demas números, han convenido los Arisméticos en reducir ó juntar diez unidades en sola una, á la qual han dado el nombre de *decena*: en contar por decenas del mismo modo que por unidades, esto es en contar una decena, dos decenas, tres decenas &c. hasta nueve: y en valerse para representar estas nuevas unidades de los mismos guarismos que para pintar las simples unidades; pero las distinguen por el lugar en *que se escriben*, poniéndolas al lado de las unidades simples ácia la izquierda.

Segun esto, para representar *cincuenta* y *quatro* que contiene cinco decenas y quatro unidades, han convenido en escribir 54; para representar *sesenta*, que contiene un número cabal de decenas sin unidad alguna, escriben 60, poniendo un cero, que dá á entender que no hay unidades simples, y hace que el guarismo 6 represente un número de decenas. A este modo se puede contar hasta *noventa y nueve* inclusivè.

9 Observemos de paso una propiedad de la numeracion actual, y es que un guarismo puesto al lado de otro ácia la izquierda, ó despues del qual se sigue cero, representa un número diez veces mayor que si estubiera solo.

10. En virtud de un convenio semejante, desde 99

se puede contar hasta *novecientos noventa y nueve.* Con diez decenas se formará una sola unidad que se llamará *centenar*, porque diez veces diez son ciento; se contarán estos centenares desde uno hasta nueve, y se representarán con los mismos guarismos; pero colocándolos al lado de las decenas ácia la izquierda.

A este modo, para representar *ochocientos cincuenta y nueve*, que contienen ocho centenares, cinco decenas y nueve unidades, se escribirá 8 5 9. Si quisiésemos representar *ochocientos y nueve*, que contienen ocho centenares, ninguna decena, y nueve unidades, se escribirá 8 0 9; quiero decir que se escribirá cero en lugar de las decenas que no hay. Si faltasen tambien las unidades, se deberian poner dos ceros; y así para espresar *ochocientos* se escribirá 8 0 0.

Acabamos de decir que para representar ochocientas y nueve unidades, se debe escribir 8 0 9, poniendo un cero en lugar de las decenas que no hay. Es facil percibir, despues de lo dicho, la razon de esta práctica, porque si, quando quiero pintar ochocientos y nueve, no pusiera caracter alguno en lugar de las decenas que no hay, escribiría 8 9, en cuyo número el guarismo 8 espresa decenas (9) y no centenares, segun me habia propuesto; luego para que 8 esprese centenares, ó valga ochocientos, he de poner un cero entre el 8 y el 9. Aplíquese este razonamiento á todos los casos semejantes.

11 Repárese tambien que en virtud de este convenio, un guarismo, al qual se siguen otros dos ó dos ceros, re-

Digitized by Google

representa un número cien veces mayor que si estubiese solo.

12 Desde *novecientos noventa* y *nueve* se puede contar, usando del mismo artificio, hasta *nueve mil novecientos noventa y nueve*, formando con diez centenares una unidad que llamaremos *millar*, porque diez veces ciento son mil, contando estas unidades como se hizo ántes, y representándolas con los mismos guarismos puestos al lado de los centenares ácia la izquierda.

Así para representar *siete mil ochocientos cincuenta y nueve*, se escribirá 7 8 5 9 : para representar *siete mil y nueve*, se escribirá 7 0 0 9. : y para pintar *siete mil* pondremos 7 0 0 0 ; donde se ve que un guarismo, al qual se le siguen otros tres ó tres ceros, representa un número mil veces mayor que si estubiera solo.

13 Practicando este artificio de comprehender diez unidades de cierta órden en una sola unidad, y colocar estas nuevas unidades en lugares tanto mas abanzados ácia la izquierda quanto mayor es su órden, se consigue espresar por un método uniforme y con solos diez caracteres todos los números enteros imaginables.

14 Para pronunciar ó leer facilmente un número representado por quantos guarismos se quisiere, se repartirá con el pensamiento, en porciones de tres guarismos cada una, procediendo de la derecha á la izquierda : se la darán á cada porcion los nombres siguientes, empezando por la derecha, *unidades*, *millares*, *millones*, *millares de millones*, *billones*, *millares de billones*, *trillones* &c. El primer gua-

 ris-

rismo de cada porcion, empezando siempre por la derecha, llevará el nombre de la porcion, el segundo el de decenas, y el tercero el de centenares.

Así se empezará leyendo por la izquierda; se leerá cada porcion como si estubiera sola: y al fin de cada una se pronunciará el nombre de esta misma porcion: por egemplo, para pronunciar el número siguiente

mill. de bill.	*bill.*	*mill. de mill.*	*millon.*	*millar.*	*unidades.*
23,	456,	789,	234,	565,	456,

se dirá, veinte y tres *millares de billon*, quatrocientos cincuenta y seis *billones*, setecientos ochenta y nueve *millares de millon*, doscientos treinta y quatro *millones*, quinientos sesenta y cinco *mil*, quatrocientas cincuenta y seis *unidades*.

15 De la numeracion que acabamos de declarar, y que es de puro convenío, se infiere que yendo de la derecha á la izquierda, las unidades de que se compone cada número ván siendo diez veces mayores: y que por consiguiente para hacer que un número sea diez veces, cien veces, mil veces mayor, basta poner á continuacion del guarismo de sus unidades, uno, dos, tres &c. ceros; al contrario retrocediendo de la izquierda á la derecha, las unidades van siendo diez veces menores.

16 Tal es la numeracion actual, y es el fundamento de todos los demas modos de contar; bien que en muchas artes no se sigue siempre el método de contar solo por decenas, por decenas de decenas &c.

17 Para valuar las cantidades menores que la unidad que

Digitized by Google

que se ha escogido, se parte esta en otras unidades menores, cuyo número puede ser el que se quisiere, con tal que con ellas se puedan medir las cantidades que se lleva intento de apreciar; pero el punto al qual se debe principalmente atender en esta especie de divisiones, consiste en hacer que sean los cálculos los mas cómodos que posible sea: por este motivo en vez de partir la unidad en muchas partes, á fin de poder valuar las mas pequeñas, se parte solo en cierto número de partes, se subdividen estas en otras, y estotras en otras aun menores. Por este método se divide primero el peso en 15 partes que llaman *reales*, el real en 34 partes que llaman *maravedises*. En las medidas de peso se divide la libra en 2 *marcos*, el marco en 8 *onzas*, la onza en 8 *dracmas* &c. de suerte que en el primer caso se cuenta por quince, y por treinta y quatro; en el segundo por dos, por octavos &c.

18 Un número, cuyas partes se refieren á diferentes unidades, se llama número *complexo*: y llamaremos número *incomplexo* al que no espresáre sino una especie de unidad. 8 rs. ú 8 reales son un número incomplexo; 8 rs. 15 mrs. ú 8 reales 15 maravedises son un número complexo.

19 Cada arte divide á su modo la unidad principal que ha escogido. Las subdivisiones de la vara son distintas de las del dia y de la hora: estas no son las mismas que las del marco, y así prosiguiendo. Declararémos estas divisiones quando tratemos de los números complexos.

Hay otro modo de dividir la unidad, y sus partes mu-

Digitized by Google

chísimo mas acomodado que todos estos para el cálculo, y le declararemos mas adelante.

Operaciones de la Arismética.

20 Sumar, restar, multiplicar y partir son las quatro operaciones fundamentales de la Arismética. Todas las cuestiones, que se pueden proponer sobre los números, se reducen á egecutar alguna de estas operaciones ó todas ellas. Importa, pues, entenderlas perfectamente y hacerse diestro en practicarlas.

21 El fin á que se dirige la Arismética es, segun llevamos dicho, enseñar medios para calcular con facilidad los números. Consisten estos medios en reducir el cálculo de los números mas compuestos al cálculo de los números mas simples, ó espresados por el menor número de guarismos que sea posible. Vamos á declarar cómo se egecuta esto, dando primero reglas para calcular los enteros y despues enseñaremos cómo se calculan los quebrados.

De la Adicion de los Números enteros.

22 Quando se calculan muchos números con la mira de espresar con uno solo el valor de todos juntos, esto se llama hacer una *adicion*.

Quando los números que se han de sumar no contienen sino un guarismo, no se necesita regla alguna; pero quando constan de muchos guarismos, se halla su valor total, llamado *suma*, practicando la regla siguiente.

Es-

Digitized by Google

Escríbanse unos encima de otros todos los números propuestos, de modo que los guarismos de las unidades de cada uno estén en una misma linea de arriba abajo, que llamaremos *columna*: practíquese lo mismo para con las decenas, los centenares &c. y tírese debajo de todo una linea.

Súmense primero todos los números que ocupan la columna de las unidades: si la suma no pasa de 9, escríbase debajo: si pasa de 9, contendrá decenas: escríbase debajo en este caso lo que hay á mas de las decenas: cuéntense estas decenas por otras tantas unidades, y júntense con los números de la columna inmediata: practíquese para con los números de esta segunda columna la misma regla que se practicó respecto de los de la primera, y váyase prosiguiendo así de columna en columna hasta la última, debajo de la qual se escribirá la suma conforme saliere. Los egemplos aclararán esta regla.

EGEMPLO I.

Supongamos que se trate de sumar 54925 con 2023: escribo estos números como se vé.

$$\begin{array}{r} 54925 \\ 2023 \\ \hline 56948 \end{array} \text{ Suma.}$$

Y despues de haber tirado la linea empiezo por las unidades, diciendo 5 y 3 son 8, que escribo debajo de la columna que ocupan dichas unidades.

Pa-

Digitized by Google

Paso á la de las decenas, en la qual digo 2 y 2 son 4, que pongo debajo.

En la columna de los centenares, digo 9 y 0 son 9, que escribo debajo de esta columna.

En la columna de los millares, digo 4 y 2 son 6, que escribo debajo de dicha columna.

Finalmente en la de las decenas de mil, digo 5 y nada son 5, que escribo igualmente debajo.

El número 56948 hallado por esta operacion es la suma de los dos números propuestos: porque incluye sus unidades, sus decenas, sus centenares, sus millares y sus decenas de mil, que hemos juntado sucesivamente.

EGEMPLO II.

Se pide la suma de los quatro números siguientes 6903, 7854, 653, 7327: escríbolos como se vé.

$$
\begin{array}{r}
6903 \\
7854 \\
953 \\
7327 \\
\hline
23037
\end{array}
\text{ Suma.}
$$

Y empezando como ántes por la derecha, digo 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17: escribo las siete unidades debajo de la primera columna, y llevo la decena para juntarla como unidad con los números de la columna que se sigue, que son tambien decenas.

Pa-

Pasando á la segunda columna, digo 1 que llevo y 0 son 1, y 5 son 6, y 5 son 11, y 2 son 13: escribo 3 debajo de esta columna: y en lugar de la decena llevo una unidad, que junto con la columna inmediata, diciendo 1 y 9 son 10, y 8 son 18, y 9 son 27, y 3 son 30, pongo 0 debajo de esta columna: y en lugar de las tres decenas llevo tres unidades, que junto con la columna siguiente, diciendo igualmente 3 y 6 son 9, y 7 son 16, y 7 son 23, pongo 3 debajo de esta columna; y como no se sigue otra, escribo en un lugar mas adelante las dos decenas que deberian juntarse con la columna siguiente si la hubiese. El número 23037 es la suma de los quatro números propuestos.

23 Para representar la adicion suelen usar los Matemáticos de esta señal + que significa *mas*: así la suma de 3 y 4 la escriben de este modo $3 + 4$, y para decir que $3 + 4$ valen 7, escriben $3 + 4 = 7$, sirviéndose del signo $=$ que significa *igual*, ó *es igual á*: y así $8 + 9 = 17$ quiere decir que la suma de 8 y 9 vale 17.

De la Sustraccion de los Números enteros.

24 La sustraccion es una operacion en que se resta un número de otro. El resultado de esta operacion se llama *resta*, *exceso* ó *diferencia*.

Para hacer esta operacion se escribe el número que se quiere restar debajo del otro, del mismo modo que en la adicion: y tirando una linea, se quitará yendo de la derecha

á

Digitized by Google

á la izquierda cada número inferior del superior correspondiente, esto es las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, &c. se escribirá cada resta debajo en el mismo órden, y cero quando no resta nada.

Si el guarismo inferior fuere mayor que su correspondiente superior, se le añadirán á este diez unidades, sacándolas con el pensamiento de su inmediato ácia la izquierda, el qual por esta razon deberá considerarse como menor de una unidad, segun se practíca con el 4 del egemplo II.

EGEMPLO I.

Propongamos restar 5432 de 8954. Escribo estos dos números como sigue.

$$\begin{array}{r} 8954 \\ 5432 \\ \hline 3522 \text{ resta.} \\ \hline \end{array}$$

Y empezando por el guarismo de las unidades, digo quitando 2 de 4, resta 2 que pongo debajo: pasando despues á las decenas, digo quitando 3 de 5, resta 2 que escribo debajo de las decenas. Llegando á la tercera columna digo, quitando 4 de 9, resta 5 y le pongo debajo de esta columna. Finalmente paso á la quarta columna, y digo quitando 5 de 8, resta 3, le escribo debajo del 5, y hallo que restando 5432 de 8954 la resta es 3522.

EGEM-

Digitized by Google

EGEMPLO II.

Quiero restar 7987 de 27646

escribo. . . . 27646

7987

19659 resta.

Como no puedo quitar 7 de 6, le añado al 6 diez unidades que saco quitándole una unidad al guarismo 4 que tiene inmediato ácia la izquierda, y digo restando 7 de 16, resta 9 que pongo debajo del 7.

Pasando á las decenas no diré ya, restando 8 de 4; pero diré restando 8 de 3 solamente, porque el 4 ha perdido una unidad que se añadió al 6; como no se puede quitar 8 de 3, le añadiré tambien al 3 diez unidades sacadas del guarismo 6 que está inmediato ácia la izquierda, al qual se le quitará para este fin una unidad: y digo, restando 8 de 13, resta 5 y pongo 5 debajo del 8.

Pasando á la tercera columna, digo igualmente quitando 9 de 5, ó mejor quitando 9 de 15 (practicando lo propio que ántes) resta 6 que escribo debajo del 9.

Llego á la quarta columna, y digo por la misma razon, quitando 7 de 6, ó por mejor decir, de 16, queda 9 que pongo debajo del 7; y como no hay nada que quitar en la quinta columna, escribo debajo de esta columna no 2, porque á este 2 se le ha quitado una unidad, sino solo 1, y saco la resta 19659.

Si

25 Si el guarismo al qual se le ha de quitar una unidad fuese cero, se tomaría esta unidad no del cero, sino del primer guarismo significativo que se le siguiese ácia la izquierda; pero aunque entónces se toma 100, ó 1000, ó 10000, segun hay uno, dos ó tres ceros seguidos, no por esto se dejará de proceder como se ha dicho: quiero decir que no se le añadirá mas de 10 al guarismo que dá motivo á este empréstito; y como se supone que estos 10 se han tomado de los 100, ó de los 1000 &c. para emplear los 90, ó los 990 que restan, se contarán los ceros siguientes por otros tantos 9, como lo declarará el egemplo siguiente.

EGEMPLO III.

	99
Si de......	20064
quiero restar.......	17489
	2575 resta.

Diré desde luego quitando 9 de 4 ó de 14 (pidiendo prestada una unidad al guarismo siguiente) resta 5. Para proseguir la operacion, consideraré, que como no se puede restar 8 de 5, y que tampoco se puede pedir prestado al caracter inmediato que es cero, habré de tomar una unidad del 2, que vale mil respecto del guarismo 6 en que estoy. De este millar no se le añadirán sino 10 unidades al 6 que ya no vale sino 5, y diré quitando 8 de 15, resta 7.

Co-

Como del millar de unidades que tomé prestado no he añadido sino 10 al guarismo 5, emplearé las 990 restantes para restar de ellas los números que están debajo de los ceros, lo que viene á ser lo mismo que si se tomára cada cero por 9: así diré quitando 4 de 9, resta 5: quitando 7 de 9, resta 2: y finalmente quitando 1 de 1, no resta nada.

26 Para representar la sustraccion suelen usar los Matemáticos de esta señal — que significa *menos*: así la diferencia de 8 á 5 la escriben de este modo 8—5, y para decir que la diferencia de 8 á 5, ó que 8—5 valen 3, escriben 8—5=3.

De la prueba de la Adicion y de la Sustraccion.

27 Probar una operacion es hacer otra operacion para asegurarse de que es exacto el resultado de la primera.

Egecútase la prueba de la adicion juntando otra vez por partes, empezando por la izquierda, las sumas que se han juntado. Se quita el total de la primera columna de la parte que la corresponde en la suma inferior: se escribe debajo la resta, que se reduce por el pensamiento á decenas, para juntarla con el guarismo siguiente de la misma suma ácia la derecha, y del total se resta la suma de la columna superior: se prosigue del mismo modo hasta la última columna, cuya totalidad quitada del número correspondiente no debe dejar resta alguna.

Así habiendo hallado arriba que la suma de los quatro números

6903

$$\begin{array}{r}
6903 \\
7854 \\
953 \\
7327 \\
\hline
\text{es.} \ldots\ldots\; 23037 \\
\cancel{3}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{0}
\end{array}$$

para comprobar este resultado, sumo los mismos números empezando por la izquierda, y digo 6 y 7 son 13, y 7 son 20, que quitados de 23, resta 3, ó 3 decenas que con el guarismo siguiente son 30. Paso á la segunda columna, y digo 9 y 8 son 17, y 9 son 26, y 3 son 29 que restados de 30, resta 1 ó una decena que con el guarismo siguiente hace 13. Junto todos los números de la siguiente columna, diciendo 5 y 5 son 10, y 2 son 12: quitándolos de 13, resta 1 ó una decena que con el guarismo siguiente hace 17: sumo del mismo modo todos los guarismos de la quarta columna, diciendo 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17: quitándolos de 17 no resta nada: de lo que infiero que es exacta la primera operacion.

Se infiere que está bien hecha la primera operacion quando despues de esta prueba no resta nada: porque quitando sucesivamente de la suma todos los millares, todos los centenares, todas las decenas y todas las unidades de que se habia formado, es preciso que al cabo no reste nada.

28 La prueba de la sustraccion se hace sumando la res-

resta hallada con el número que se restó : si fue bien hecha la primera operacion debe salir el número del qual se restó el otro: así veo que en el tercer egemplo arriba puesto está bien hecha la operacion; porque sumando 17489 (número restado) con la resta 2565, vuelve á salir 20054, de cuyo número se restó el primero.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

De la Multiplicacion.

29 Multiplicar un número por otro es tomar el primero de los dos tantas veces como unidades hay en el segundo. Multiplicar 4 por 3 es tomar tres veces el número 4.

30 El número que se quiere multiplicar se llama *multiplicando* : aquel por el qual se multiplica, se llama *multiplicador* : y lo que resulta de la operacion se llama *producto*.

31 El multiplicando y el multiplicador se llaman tambien los *factores* del producto : así 3 y 4 son los factores de 12, porque 3 veces 4 son 12.

32 Segun la definicion, que hemos dado de la multiplicacion, se echa de ver que se podria practicar esta operacion, escribiendo tantas veces el multiplicando quantas unidades hay en el multiplicador, y haciendo despues la adicion: por egemplo, para multiplicar 7 por 3 se podria escribir

Digitized by Google

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

Y la suma 21 que resulta de esta adicion sería el producto.

Pero quando el multiplicador es algo grande, la operacion sería muy larga por este método; lo que propiamente llamamos multiplicacion es el método de llegar al mismo resultado por un camino mas breve.

33 Quando se consideran los números de un modo abstracto, esto es, sin atender á la naturaleza de sus unidades, es igual tomar por multiplicando ó por multiplicador el que se quisiere de los dos números propuestos. Por egemplo, si hemos de multiplicar 4 por 3, es lo mismo multiplicar 4 por 3, que 3 por 4: el producto siempre será 12; con efecto 3 veces 4 no son otra cosa que el triplo de 1 vez 4, y 4 veces 3 son el triplo de 4 veces 1; pero es evidente que 4 veces 1, y 1 vez 4 son una misma cosa: y lo mismo se puede decir de otro número qualquiera.

34 Pero quando por los términos de la cuestion el multiplicando y el multiplicador son números concretos, importa distinguir el multiplicando del multiplicador: este cuidado es particularmente necesario en la multiplicacion de los números complexos, conforme veremos en adelante.

Es facil hacer esta distincion: la cuestion que dá motivo á la multiplicacion propuesta, manifiesta por sí qual es la can-

Digitized by Google

cantidad que se ha de tomar muchas veces, esto es el multiplicando; y qual es la que señala quantas veces la primera se debe repetir, esto es, qual es el multiplicador.

35 Como el oficio del multiplicador es espresar quantas veces se debe tomar el multiplicando, siempre es un número abstracto: así quando se pregunta quanto importan 52 varas de paño á 36 reales la vara, se ve que el multiplicando es 36 rs. que se han de repetir 52 veces, sea que 52 represente varas, ú otra cosa qualquiera.

36 Por consiguiente el producto que resulta de la repetida adicion del multiplicando, espresará unidades de la misma naturaleza que el multiplicando.

Concluida esta digresion sobre la naturaleza de las unidades del producto y de sus factores, declaremos el método para hallar este producto.

37 La regla de la multiplicacion de los números mas compuestos, se reduce á multiplicar un número de un solo guarismo por otro número tambien de un solo guarismo. Es pues, muy conducente egercitarse en hallar el producto de los números representados por un solo guarismo, juntando muchas veces un número con el mismo número. Se puede tambien hacer uso de la tabla siguiente que algunos atribuyen á Pythágoras.

Digitized by Google

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primera columna de esta tabla, empezando á mano Izquierda, se forma juntando 1 con 1 sucesivamente.

La segunda juntando del mismo modo 2.

La tercera practicando lo propio con 3, y así prosiguiendo.

38 Para hallar por medio de esta tabla el producto de dos números compuestos de un solo guarismo cada uno, se buscará el uno de dichos dos números, pongo por caso el multiplicando, en la fila superior, y desde dicho número se bajará perpendicularmente hasta llegar enfrente del multiplicador que se hallará en la primera columna. El número que se halláre con esta circunstancia será el producto: así para hallar, por egemplo, el producto de *9* por *6*, ó quanto ha-

Digitized by Google

hacen 6 veces 9 : voy bajando desde el 9 que está en la primera fila, hasta llegar enfrente del 6 que está en la primera columna: el número 54, al qual voy á parar, manifiesta que 6 veces 9 son 54.

39 La señal de la multiplicacion es esta × que significa *multiplicado por*; así 3 × 4 = 12 quiere decir que el producto de 3 por 4 vale 12. Quando alguna de las dos cantidades que se han de multiplicar, ó ambas son muy compuestas, se escribe dentro de un paréntesis, para dar á entender que toda ella se ha de multiplicar. (3 + 4) × 3 significa que no es solo el 4 el que se ha de multiplicar por 3, sino la suma de 3 y 4 esto es 7. En adelante se manifestará la necesidad de esta prevencion.

Esto supuesto, yá podemos declarar la multiplicacion de los números que contienen muchos guarismos.

De la Multiplicacion por un número de un solo guarismo.

40 Escríbase el multiplicador que, segun suponemos, no contiene sino un guarismo, debajo del multiplicando, donde se quisiere; bien que para dar una regla fija, supondrémos que se escribe siempre debajo de las unidades.

Multiplíquese primero el número de las unidades por dicho multiplicador, y si el producto no contiene sino unidades, escríbase este producto debajo; si contiene unidades y decenas, escríbanse solas las unidades, y contando las decenas por otras tantas unidades, llévense.

Multiplíquese igualmente el número de las decenas del multiplicando, y añádase al producto el número de decenas que se lleva: escríbase la suma debajo, si puede espresarse con un solo guarismo; si no, escríbanse solas las unidades de este producto, y llévense las decenas que son centenares, para juntarlas con el producto siguiente que tambien espresará centenares.

Prosígase multiplicando sucesivamente segun la misma regla todos los guarismos del multiplicando, la serie de los guarismos que se hubieren escrito espresará el producto.

EGEMPLO.

Se pregunta ¿quantos pies valen 2864 varas? cada vara consta de 3 pies. Se reduce la cuestion á tomar 3, 2864 veces, ó lo que es lo mismo (33) á tomar 2864 pies tres veces.

Escribo pues...........	2864	multiplicando
	3	multiplicador
	8592	producto.

Y digo, empezando por las unidades, 3 veces 4 son 12: pongo 2, y llevo una unidad por la decena.

2.° 3 veces 6 son 18, y una que llevo son 19: pongo 9 y llevo 1.

3.° 3 veces 8 son 24, y 1 que llevo son 25: pongo 5 y llevo 2.

4.° 3 veces 2 son 6, y 2 que llevo son 8, que escribo bo como se ve. El número 8592 es el producto que buscaba, ó el número de pies que valen las 2864 varas, pues contiene 3 veces las 4 unidades, 3 veces las 6 decenas, 3 veces los 8 centenares, y tres veces los 2 millares, y por consiguiente 3 veces todo el número 2864.

De la Multiplicacion por un número de muchos guarismos.

41 Quando el multiplicador se compone de muchos guarismos, se debe practicar sucesivamente con cada uno de dichos guarismos lo que acabamos de declarar para el caso en que se compone de solo uno; pero empezando siempre por la derecha: así se multiplicarán primero todos los guarismos del multiplicando por el guarismo de las unidades del multiplicador, despues por el de las decenas, y este segundo producto se escribirá debajo del primero; pero como debe espresar decenas, pues se multiplica por decenas, se escribirá el primer guarismo de este segundo producto debajo de las decenas, y los demás guarismos abanzando ácia la izquierda.

El tercer producto que se sacará multiplicando por centenares, se pondrá debajo del segundo, pero abanzando tambien un lugar ácia la izquierda: la misma ley se guardará para con los demas.

Hechas todas estas multiplicaciones, se sumarán los productos particulares que de ellas hubieren resultado, y será la suma el producto total.

Digitized by Google

EGEMPLO.

Se ha de multiplicar.....	65487
por.....................	6958
	523896
	327435
	589383
	392922
	455658546 producto.

Multiplíco prímeramente 65487 por el número 8 de las unidades del multiplicador, y escribo sucesivamente debajo de la linea los guarismos del producto 523896, que hallo practicando la regla que se dió para el primer caso (40).

Multiplico igualmente 65487 por el segundo guarismo 5 del multiplicador, y escribo el producto 327435 debajo del primer producto; pero colocando el primer guarismo 5 debajo de las decenas del primer producto.

Multiplicando tambien 65487 por el tercer guarismo 9, escribo el producto 589383 debajo del precedente; pero colocando el primer guarismo 3 en la columna de los centenares, porque el número que sirve de multiplicador espresa centenares.

Finalmente multiplico 65487 por el último guarismo 6 del multiplicador, y escribo el producto 392922 debajo del antecedente, abanzando tambien una columna ácia la izquierda, á fin de que su último guarismo esté en la

de

de los millares, porque el guarismo que sirve de multiplicador espresa millares: últimamente sumo todos estos productos, y me sale 45565546 para el producto de 65487 multiplicado por 6958; esto es, para el valor de 65487 tomado 6958 veces. Y con efecto, en la primera operacion se tomó 65487, 8 veces, 50 en la segunda, 900 en la tercera, y 6000 en la última.

42 Si los últimos caracteres del multiplicando ó del multiplicador ó de ambos fuesen ceros, se abreviará la multiplicacion egecutándola como si no hubiese tales ceros; pero despues se escribirán todos á continuacion del producto.

EGEMPLO.

Se trata de multiplicar....	6500
por........................	350
	325
	195
	2275000

Multiplico solo 65 por 35, y hallo 2275, á continuacion de cuyo número escribo los tres ceros, que son la suma de los que hay en el multiplicando y el multiplicador juntos.

Y de hecho, el multiplicando 6500 representa 65 centenares: así quando se multiplica 65, se debe tener presente que el producto ha de espresar centenares. El multiplicador 350 espresa 35 decenas: así quando se multiplica

por

por 35, se debe tener presente que el producto debe espresar decenas: contendrá pues este producto decenas de centenares, esto es millares; ha de llevar por consiguiente tres ceros. Aplícase este raciocinio á los demás casos.

43 Si entre los guarismos del multiplicador hubiese ceros; como de la multiplicacion por estos ceros no resultarian sino ceros, se escusaría escribirlos en el producto: y pasando desde luego á egecutar la multiplicacion por el primer caracter significativo que se siguiese despues de dichos ceros, se escribiría mas ácia la izquierda su producto, tantas columnas mas una, quantos ceros hubiere de seguida en el multiplicador: quiero decir dos columnas mas ácia la izquierda si hubiere un cero y tres si hubiese dos.

EGEMPLO.

Si se ha de multiplicar....	42052
por........................	3006
	252312
	126156
	126408312

Habiendo multiplicado por 6, y escrito el producto 252312, se multiplicará al punto por 3; pero se escribirá el producto 126156, de modo que esprese millares: se deberá pues escribir tres columnas mas ácia la izquierda, porque son dos los ceros interpuestos entre los caracteres significativos del multiplicador.

Al-

Algunos usos de la Multiplicacion.

44 No es nuestro ánimo declarar todos los usos para que puede servir la multiplicacion : nos ceñiremos á referir algunos , por los que se podrán inferir los demas.

La multiplicacion sirve para hallar , en general , el valor de muchas unidades , quando se conoce el valor de cada una. Por egemplo , 1.° ¿Quanto han de costar 5843 varas de obra , á razon de 54 rs. la vara ? Se debe multiplicar 54 rs. por 5843 , ó (33) 5843 por 54 , será el precio total que se pide 315522 rs. 2.° ¿Quanto pesan juntos 5954 maderos , en el supuesto de que pesa 72 libras cada madero? Se han de multiplicar 72 libras por 5954 , ó 5954 por 72 : saldrà que el peso total de los 5954 maderos ès de 428688 libras.

45 Sirve la multiplicacion para reducir unidades de cierta especie á unidades de menor especie. Pongo por egemplo , para reducir los pesos á reales , y los reales á maravedis : las varas á pies , estos á pulgadas , las pulgadas á lineas : los dias á horas , estas á minutos , los minutos á segundos. Suelen ocurrir ocasiones en que son indispensables estas reducciones : daremos algunos egemplos.

Si se nos propone que reduzcamos 8 pesos , 13 reales y 9 mrs. á maravedis : como el peso vale 15 reales , se multiplicarán los 8 pesos por 15 (42) , cuya operacion dará 120 rs. con los quales juntando los 13 , saldrán 133 rs. cuya cantidad se multiplicará por 34 , porque cada real

va-

Digitized by Google

vale 34 mrs: y saldrán 4522 mrs. que juntos con los 9 mrs. darán 4531 mrs, que son los que componen los 8 pesos, 13 rs. y 9 maravedis propuestos.

Si se pregunta quantos minutos hay en un año comun ó en 365 dias, 5 horas, 48 minutos, ó 365 d. 5 h. 48 m; como el dia se compone de 24 horas, se multiplicará 24 por 365, y al producto 8760 h. se añadirán 5 h: se multiplicará el total 8765 por 60 (42), porque en la hora hay 60 minutos: y saldrán 525900, á los que añadiendo 48 m. saldrán 525948 m. que componen un año comun.

46 Antes de concluir tenemos por útil prevenir que estas espresiones *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar*, &c. significan lo mismo que multiplicar por 2, por 3, por 4, &c.

De la Division de los Números enteros.

47 Dividir un número por otro es, en general, buscar quantas veces el primero de dichos números contiene el segundo.

El número que se quiere partir se llama *Dividendo*, el número por el qual se parte *Divisor*, y el que espresa quantas veces el dividendo contiene al divisor se llama *Cociente*.

No siempre se lleva en la division la mira de saber quantas veces un número contiene otro; pero, en todos los casos se egecuta la division como si fuese este el fin: por lo que se la puede considerar en todos los casos como la operacion por la qual se halla quantas veces el dividendo contiene el divisor.

In-

Digitized by Google

Infiérese de aquí 1.° Que quanto mayor fuere el divisor, siendo uno mismo el dividendo, tanto menor será el cociente. 2.° Que si se multiplica el divisor por el cociente, el producto que saliere será el dividendo, porque esto es tomar el divisor tantas veces como cabe en el dividendo: esto se verifica generalmente, ya sea el cociente un número entero, ya sea un número fraccionario.

Por lo que mira á la especie de las unidades del cociente, no se deben apreciar ni por las que espresa el dividendo ni por las que espresa el divisor: el cociente, que siempre será un mismo número, podrá ser muy diverso respecto de la naturaleza de sus unidades, segun fuere la cuestion que diere motivo á la division.

Por egemplo, si se trata de saber quantas veces 8 pesos contienen 4 pesos, el cociente será un número abstracto, que espresará dos veces. Pero si se pregunta quantas varas de obra se podrán mandar hacer por 8 pesos, á razon de 4 pesos la vara, el cociente será 2 varas que es un número concreto, y cuya especie ninguna relacion tiene ni con el dividendo ni con el divisor.

Pero se echa de ver al mismo tiempo que la cuestion que da motivo á la division propuesta, determina la naturaleza de las unidades del cociente.

De la Division de un Número compuesto de muchos guarismos por otro que no tiene sino uno.

48 La operacion que vamos á esplicar supone que se se-

sepa hallar quantas veces un número de uno ú dos guarismos contiene un número de solo un guarismo. En esto debe estar corriente el que supiere de memoria los productos de los números que no tienen sino un guarismo. Se puede tambien conseguir valiéndose de la tabla que dimos arriba (37). Por egemplo, si quiero saber quantas veces 74 contiene 9, busco el divisor 9 en la fila superior, y bajo perpendicularmente hasta encontrar el número que mas se acerca á 74 que es 72 : entónces el número 8, que está enfrente de 72 en la primera columna, es el número de veces que 9 cabe en 74, ó el cociente que busco.

Esto supuesto, la division de un número que tiene muchos guarismos, por un número que no tiene sino uno, se practica del modo siguiente.

Escríbase el divisor al lado del dividendo, sepárese el uno del otro con una linea, y tírese otra debajo del divisor, donde se escribirán los guarismos del cociente á medida que se hallaren.

Tómese el primer guarismo del dividendo ácia la izquierda, ó los dos primeros guarismos, si el primero no contiene el divisor.

Búsquese quantas veces dicho primer guarismo ó dichos dos primeros guarismos contienen el divisor : escríbase este número de veces debajo del divisor.

Multiplíquese el divisor por el cociente que se hubiere escrito, y escríbase el producto debajo de la parte del dividendo que hubiere servido.

Fi-

Digitized by Google

Finalmente, réstese el producto de la parte superior del dividendo á la qual corresponde, y habrá tal vez una resta.

Al lado de esta resta bágese el guarismo siguiente del dividendo principal, y saldrá un segundo dividendo parcial, con el qual se practicará lo propio que con el primero, escribiendo el cociente al lado del que ya se hubiere hallado ácia la derecha, multiplicando igualmente el divisor por este cociente, escribiendo y restando el producto conforme arriba se dijo.

Se bajará del mismo modo, al lado de la resta de esta division, el guarismo del dividendo que se sigue al último que se bajó: y se irá prosiguiendo siempre del mismo modo *hasta el último* guarismo inclusivè.

Aclarará esta regla el egemplo siguiente.

EGEMPLO.

Se me propone que divida 8769 por 7.

Escribo estos números como se vé:

dividendo.......	8769	7 divisor.
	7	1252 $\frac{5}{7}$ cociente.
	17	
	14	
	36	
	35	
	19	
	14	
	5	

Y

Y empezando por la izquierda del dividendo, deberia decir en 8 mil quantas veces cabe 7; pero digo simplemente en 8 quantas veces 7? cabe 1 vez. Este 1 es naturalmente millar; pero los guarismos que se seguirán despues le darán su verdadero valor: por lo que me contento con escribir solo 1 debajo del divisor.

Multiplico el divisor 7 por el cociente 1, y llevo el producto 7 debajo de la parte 8 que acabo de dividir: egecutando la sustraccion me sale 1 por resta.

Esta resta 1 es la parte de 8 que no ha sido partida, y es una decena respecto del siguiente guarismo 7: por cuya razon bajo dicho guarismo 7 al lado, y prosigo la operacion, diciendo en 17 quantas veces cabe 7? 2 veces. Escribo este 2 ácia la derecha al lado del primer guarismo que salió de la primera operacion.

Multiplico, como en la primera operacion, el divisor 7 por el cociente 2 que acabo de hallar; llevo el producto 14 debajo del dividendo parcial 17, y egecutando la sustraccion resta 3 que es la parte que no se ha podido dividir.

Al lado de esta resta 3, bajo 6 tercer guarismo del dividendo, y digo en 36 quantas veces 7? 5 veces. Escribo 5 al cociente.

Multiplico el divisor 7 por 5, y habiendo escrito el producto 35 debajo del nuevo dividendo parcial, hago la sustraccion y resta 1.

Finalmente, al lado de esta resta 1, bajo el guarismo mo 9 del dividendo, y digo en 19 quantas veces 7? 2 veces: escribo 2 al cociente.

Multiplico el divisor 7 por este nuevo cociente 2, y habiendo escrito el producto 14 debajo del último dividendo parcial 19, y egecutando la sustraccion, sale la resta 5.

Hallo, pues, que 8769 contienen 7 tantas veces quantas espresa el cociente que he escrito, esto es 1252 veces, y que resta 5.

Por lo que mira á esta resta, nos contentaremos por ahora con decir que se escribe al lado del cociente, conforme se ve en el egemplo, esto es, escribiendo el divisor debajo de dicha resta, y tirando una linea entre los dos; cuya cantidad se pronuncia *cinco séptimos.* Mas adelante esplicaremos la naturaleza de esta especie de números.

Si sucediere que en el discurso de la division no cupiese el divisor en alguno de los dividendos parciales, se escribirá cero al cociente, y omitiendo la múltiplicacion, se bajará inmediatamente otro guarismo al lado de dicho dividendo parcial, y se proseguirá la division.

Digitized by Google

EGEMPLO.

Trátase de partir 14464 por 8.

```
14,4,6,4 | 8
 8       |-----
-----    | 1808
 64
 64
-----
 0064
   64
-----
   00
```

En este egemplo tomo los dos primeros guarismos del dividendo, porque el primero solo no contiene el divisor.

Hallo que 14 contiene 8, 1 vez; pongo 1 al cociente: multiplico 8 por 1, y resto el producto 8 de 14, y resta 6, al lado del qual bajo el tercer guarismo 4 del dividendo.

Prosigo diciendo: en 64 quantas veces 8? 8 veces: pongo 8 al cociente, y egecutando la multiplicacion, sale el producto 64 que resto del dividendo parcial 64, resta 0, al lado del qual bajo 6, quarto guarismo del dividendo; y como 6 no contiene 8, pongo 0 al cociente, y bajo inmediatamente al lado de 6 el último guarismo del dividendo, que en nuestro egemplo es 4, para decir en 64 quantas veces 8? cabe 8 veces: despues de haber escrito 8 al cociente, hago la multiplicacion, y resto el producto 64;

64 ; y como no resta nada , infiero que 14464 contiene 8 , 1808 veces cabales.

De la Division por un número de muchos guarismos.

50 Quando el divisor tubiere muchos guarismos , se procederá del modo siguiente.

Tómense en el dividendo ácia la izquierda tantos guarismos quantos fueren menester para que en ellos quepa el divisor.

Hecho esto , en vez de buscar como en el caso precedente , quantas veces la parte del dividendo que se ha tomado contiene el divisor entero , búsquese solo quantas veces el primer guarismo del divisor cabe en el primer guarismo del dividendo ; ó en los dos primeros , si no bastare el primero : escríbase el cociente que saliere debajo del divisor como se hizo ántes.

Multiplíquense sucesivamente segun la regla dada (40) todos los guarismos del divisor por dicho cociente , y á medida que se vaya egecutando esta operacion , llévense los guarismos del producto debajo de los guarismos correspondientes del dividendo parcial. Hágase la sustraccion , y al lado de la resta bágese el guarismo siguiente del dividendo para proseguir la operacion del mismo modo.

Aclararémos esto con algunos egemplos , y espresarémos los casos en que puede ofrecerse alguna dificultad.

Digitized by Google

EGEMPLO I.

Se me propone la division de 75347 por 53.

$$
\begin{array}{r|l}
75347 & 53 \\ \cline{2-2}
\underline{53} & 1421\frac{34}{53} \\
223 & \\
\underline{212} & \\
114 & \\
\underline{106} & \\
87 & \\
\underline{53} & \\
34 &
\end{array}
$$

Tomo solo los dos primeros guarismos del dividendo, porque contienen el divisor; y en vez de decir en 75 quantas veces 53? busco solo quantas veces las 7 decenas de 75 contienen las 5 decenas de 53, esto es, quantas veces cabe 5 en 7: hallo que 1 vez, y pongo 1 al cociente.

Multiplico 53 por 1, y llevo el producto 53 debajo de 75: hecha la sustraccion, resta 22, al lado del qual bajo el guarismo 3 del dividendo, y prosigo diciendo, para mayor facilidad: en 22 quantas veces 5? (en vez de decir en 223 quantas veces 53): hallo que 4 veces, y pongo 4 al cociente.

Multiplico sucesivamente por 4 los dos guarismos del divisor, y llevo el producto 212 debajo del dividendo parcial 223: hecha la sustraccion, resta 11; bajo al lado

de

Digitized by Google

de esta resta el guarismo 4 del dividendo, y digo como ántes, en 11 quantas veces 5? 2 veces: pongo 2 al cociente, y multiplico 53 por 2, sale el producto 106, que escribo debajo del dividendo parcial 114: haciendo la sustraccion, sale la resta 8, al lado de la qual bajo el último guarismo 7; divido del mismo modo 87 por 53, y prosiguiendo sin variar, hallo el cociente 1, y la resta 34, que escribo al lado del cociente, del modo que se dijo arriba. (48)

51 Procediendo con rigor, se deberia buscar quantas veces cada dividendo parcial contiene el divisor entero; pero como esta investigacion seria las mas veces larga y penosa, basta buscar, conforme lo hemos practicado, quantas veces la parte mayor de dicho dividendo contiene la parte mayor del divisor. El cociente que se halla por este medio suele no ser el verdadero, porque obrando de este modo no se halla sino un valor aproximado; pero sobre que este valor encamina siempre al fin, y que en los casos que no le alcanza, se aparta poco; la multiplicacion que viene despues sirve para enmendar los defectos que puede padecer esta práctica. Y de hecho, si el dividendo parcial contubiera realmente el divisor tres veces no mas, por egemplo; y si por la prueba que se hace, se hallára que le contiene 4 veces, es fácil ver que multiplicando el divisor por 4, saldria un producto mayor que el dividendo, pues se tomaria el divisor mas veces de las que cabe realmente en dicho dividendo, y por consiguiente seria imposible la sustraccion; entónces se disminuirá suce-

sivamente el cociente de una, dos &c. unidades, hasta hallar un producto que se pueda restar; al contrario, si no se hubiese escrito sino dos al cociente, la resta de la sustraccion saldria mayor que el divisor, lo que manifestaria que contiene aun el divisor, y que por consiguiente no es bastante grande el cociente.

Esto no debe desalentar á nadie, porque en poco tiempo se adquiere la destreza suficiente para conocer quanto se debe aumentar ó disminuir el cociente.

EGEMPLO II.

Se me propone la division de 189492 por 375

189492	375
1875	$505\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Tomo los quatro primeros guarismos del dividendo, porque no cabe el divisor en los tres primeros.

Despues digo, solo en 18 quantas veces 3? cabe realmente 6 veces; pero multiplicando 375 por 6, saldria un número mayor que el dividendo 1894: por lo que pongo solo 5 al cociente. Multiplico 375 por 5, y despues de haber escrito el producto debajo de 1894, hago la sustraccion, y sale la resta 19.

Ba-

Bajo al lado de 19 el guarismo 9 del dividendo, y como 199 que resulta no contiene 375, pongo 0 al cociente, y bajo al lado de 199 el guarismo 2 del dividendo, con lo que sale 1992, respecto del qual digo, solo en 19 quantas veces 3? 6 veces. Pero por la misma razon que arriba no pongo sino 5 al cociente, y practicando lo propio que ántes, sale la resta 117.

52. Haremos una consideracion que puede contribuir en muchos casos para escusar pruebas inútiles. Puede el calculador hallarse en el caso de hacer estas pruebas dudosas, particularmente quando el segundo guarismo del divisor es mucho mayor que el primero. En este caso, en vez de buscar *quantas* veces el primer guarismo del divisor cabe en la parte correspondiente del dividendo, se debe buscar quantas veces dicho primer guarismo aumentado de la unidad, cabe en la parte correspondiente del dividendo. Esta prueba encaminará siempre mas que la primera al verdadero cociente.

EGEMPLO.

Propónese la division de 1832 por 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ \cline{2-2} 1728 & 6\frac{104}{288} \\ \cline{1-1} 104 & \end{array}$$

En vez de decir en 18 quantas veces 2, diré en 18 quantas veces 3: porque el divisor 288 se acerca mucho mas à

300 que á 200; hallo 6, que es el verdadero cociente, siendo así que hubiera hallado 9, y me hubiera visto precisado por lo mismo á hacer tres operaciones inutiles.

Medios para abreviar el método antecedente.

53 Con la mira de facilitar la inteligencia del método, hemos dicho que se escribiese debajo de cada dividendo parcial el producto que se halla multiplicando el divisor por el cociente; pero como el fin de la Arismética debe enderezarse á abreviar las operaciones, nos parece del caso prevenir que se puede escusar escribir dichos productos, haciendo la sustraccion á medida que se va multiplicando cada guarismo del divisor. Bastará el egemplo siguiente para manifestar cómo se hace esta sustraccion.

EGEMPLO.

Quiero dividir 756984 por 932.

756984	
1138	932
2064	$812 \frac{200}{932}$
200	

Tomando los quatro primeros guarismos del dividendo que son precisos para contener el divisor, hallo que 75 contiene 9, 8 veces; por lo que escribo 8 al cociente; y en vez de llevar debajo de 7569 el producto de 932 por 8, multitiplico desde luego 2 por 8, cuya operacion me dá 16; pero como no puedo restar 16 de 9, pido prestada al guarismo siguiente 6 una decena, que añadida á 9 dá 19, del qual restando 16, resta 3 que escribo debajo.

Para llevar cuenta de esta decena, en vez de disminuir de una unidad el guarismo 6 del qual la saqué, guardo esta unidad para añadirla al producto siguiente. Así prosiguiendo la multiplicacion, digo 8 veces 3 son 24, y 1 que llevo son 25: como no puedo restar 25 de 6, pido prestadas al guarismo siguiente 5 del dividendo dos decenas, que añadidas al 6, me dan 26, de cuyo número resto 25, y resta 1, que escribo debajo del 6. Con esto he llevado en cuenta la primera decena que hubiera tenido que rebajar del 6, porque he quitado una decena de mas. Llevaré asimismo en cuenta las dos decenas que acabo de pedir prestadas. Prosigo, pues, diciendo 8 veces 9 son 72, y 2 que llevo son 74, y restándolos de 75, resta 1.

Bajo al lado de la resta 113 el guarismo 8 del dividendo, y prosigo del mismo modo diciendo en 11 quantas veces 9? 1 vez: despues digo 1 vez 2 es 2, restándolos de 8, resta 6: 1 vez 3 es 3, restándole de 3, resta 0: 1 vez 9 es 9, restándole de 11, resta 2. Bajo el guarismo 4 al lado de la resta 206, y digo en 20 quantas veces 9? 2 veces: y egecutando la multiplicacion, 2 veces 2 son 4, restándolos de 4, resta 0: 2 veces 3 son 6, restándolos de 6, resta 0: y finalmente 2 veces 9 son 18, restándolos de 20, resta 2.

Pue-

54 Puede suceder en el discurso de estas divisiones parciales que quepa el divisor en el dividendo mas de nueve veces; no obstante nunca se debe escribir mas de 9 al cociente, porque si se pudiese poner 10, seria prueba de que el cociente hallado en la operacion antecedente seria falso, porque la decena que se hallaria en el cociente actual, perteneceria á dicho primer cociente.

55 Si á continuacion del dividendo y del divisor hubiese muchos ó algunos ceros, se les podria quitar á ambos tantos ceros como hay en el que tiene menos. Por egemplo, para partir 8000 por 400, dividiré solo 80 por 4: porque es evidente que 80 centenares no contienen mas veces 4 centenares, que 80 unidades 4 unidades.

Prueba de la Multiplicacion y de la Division.

56 De la definicion misma que hemos dado de cada una de estas dos operaciones, se puede sacar el método para probarlas.

Ya que en la multiplicacion se toma tantas veces el multiplicando, quantas cabe la unidad en el multiplicador, se infiere que si se busca quantas veces cabe el multiplicando en el producto, esto es, (47) si se divide el producto por el multiplicando, debe salir al cociente el multiplicador: y como se puede tomar por multiplicador el multiplicando, y al reves, se puede decir en general, que *si se divide el producto de una multiplicacion por uno de los factores, saldrá al cociente el otro factor.*

Por

Por egemplo, habiendo hallado arriba (40) que 2864 multiplicado por 3 ha dado el producto 8592, divido 8592 por 2864: he de hallar, y hallo con efecto 3 al cociente.

Del mismo modo, ya que el cociente de una division espresa quantas veces el dividendo contiene el divisor, se sigue que si se toma el divisor tantas veces quantas espresa el cociente, esto es, si se multiplica el divisor por el cociente, debe salir el dividendo, quando no ha dejado la division resta alguna: y en los casos en que ha habido alguna resta, si se multiplica el divisor por el cociente, y se le añade al producto la resta de la division, debe salir el dividendo.

Por egemplo, hallamos arriba (51) que 189492 dividido por 375, da 505 al cociente, y la resta 117: multiplicando 375 por 505, sale 189375, á cuyo producto añadiendo la resta 117, sale el dividendo 189492.

Así pueden la multiplicacion y la division servir cada una para probar la otra.

Algunos usos de la regla antecedente.

57 Sirve la division para hallar no solo quantas veces un número contiene otro, sino tambien para partir un número en partes iguales. Tomar la mitad, el tercio, el quinto &c. de un número, es partir dicho número en 2, 3, 5 &c. partes iguales para tomar una de ellas.

Sirve tambien la division para reducir las unidades de una especie determinada, á unidades de especie superior; por

por egemplo, un número determinado de mrs. á rs. de vellon, y estos á pesos. Para reducir 16490 mrs. á rs. se reparará, que pues 34 mrs. componen un real, habrá tantos reales en la suma propuesta quantas veces en ella cupieren 34 mrs: se debe, pues, partir por 34 la suma 16490, y se hallarán 485 rs. Para reducir á pesos los 485 rs. partiremos 485 por 15, pues 15 rs. componen un peso, y saldrán al cociente 32 pesos, y 5 rs: de modo que los 16490 mrs. componen 32 pesos, y 5 rs.

De los Quebrados.

58 Los quebrados considerados arísméticamente son números con los quales espresamos las cantidades menores que la unidad.

59 Para formar juicío cabal de los quebrados, se debe considerar que la cantidad que se tomó por unidad, se compone ella misma de cierto número de unidades mas pequeñas, como concebimos, por egemplo, que el peso se compone de 15 partes ó de 15 unidades menores, que llamamos reales.

Una ó muchas de estas partes forman lo que llamamos quebrado ó fraccion de la unidad. Se dá tambien este nombre á los números que representan dichas partes.

60 Se puede espresar una fraccion por números de dos maneras, que se usan igualmente.

La primera manera consiste en representar, como los números enteros, las partes de la unidad que contiene la can-

cantidad de que se trata; pero entónces se las dá un nombre particular á dichas partes: así, para representar 7 partes de las quales hay 15 en un peso, usaríamos del guarismo 7; pero diríamos 7 reales, y escribiríamos 7 rs: esta manera de representar las partes de la unidad se estila en los números complexos de que trataremos en adelante.

61 Pero como se necesitaria un signo particular para cada division que pudiéramos hacer de la unidad, se escusa esta multiplicidad de signos, y se representa un quebrado con dos números puestos el uno encima del otro, y separados por una raya. Así, para espresar las 7 partes de que acabamos de hablar, se escribe $\frac{7}{15}$, quiero decir que, en general, se escribe primero el número que espresa quantas partes de la unidad contiene la cantidad de que se trata, y debajo de este número se escribe el guarismo que espresa quantas de dichas partes concebimos que hay en la unidad.

62 Para pronunciar un quebrado, se pronuncia primero el número superior, que se llama *numerador*: despues el número inferior, que se llama *denominador*. A este modo $\frac{4}{5}$ se pronuncia *quatro quintos*, cuya espresion dá á entender quatro partes, cinco de las quales componen la unidad. $\frac{7}{15}$ se pronuncia *siete quincenos*; $\frac{3}{20}$ *tres vigesimos*, &c. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, se pronuncian un *medio*, un *tercio*, un *quarto*.

63 Representa, pues, el numerador quantas partes de la unidad contiene la cantidad espresada por el quebrado: y el denominador espresa de qué valor son dichas partes; espresándo quantas se necesitan para formar la unidad.

Se

Se le llama denominador, porque él es en realidad quien dá nombre al quebrado, y es causa de que en estos dos quebrados, por egemplo, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$, las partes del primero se llaman *quintos*, y las partes del segundo *séptimos*.

64 De donde resulta que quanto mas se acercáre el numerador al valor del denominador, tanto mas se acercará el quebrado á valer toda la unidad, cuyas partes representa el denominador. El quebrado $\frac{4}{4}$ por egemplo, vale la unidad entera, porque contiene todas las quatro partes que componen toda la unidad. $\frac{3}{4}$ será una cantidad mayor que $\frac{2}{4}$.

65 Llámaseles tambien al numerador y al denominador juntos, los *términos del quebrado.*

De los Enteros considerados á manera de Quebrado.

66 De las operaciones que se practícan con los quebrados suelen resultar números fraccionarios, cuyo numerador es mayor que el denominador, por egemplo tales son estos números $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$, &c.

Estas espresiones y las que se les parecen no son quebrados propios; pero son números enteros juntos con quebrados.

67 Para sacar de ellos los enteros que incluyen, se debe partir el numerador por el denominador, el cociente señalará los enteros, y la resta de la division será el numerador del quebrado que acompaña dichos enteros. Así $\frac{27}{5}$ darán $5\frac{2}{5}$, esto es, cinco enteros y dos quintos.

Con efecto, en la espresion $\frac{27}{5}$ el denominador 5 maninifiesta que la unidad se compone de 5 partes: luego toda la unidad es 5 partes: luego quantas veces cupiere 5 en 27, tantas unidades enteras habrá en el valor de $\frac{27}{5}$.

68 Las multiplicaciones y las divisiones de los números enteros juntos con quebrados piden, á lo menos para mayor facilidad, que se conviertan dichos enteros en quebrados.

Se practíca esta transformacion multiplicando el número entero por el denominador del quebrado, en el qual se quiere convertir dicho entero. Por egemplo, si quiero convertir 8 enteros en quintos, multiplicaré 8 por 5, y saldrá $\frac{40}{5}$. Con efecto, quando se quiere convertir 8 en quintos, se considera la unidad como compuesta de 5 partes: las 8 unidades contendrán, pues, 40: por lo mismo 7 $\frac{4}{9}$ convertidos en novenos, serán $\frac{67}{9}$.

De las operaciones con que se pueden alterar los dos términos de un Quebrado, sin que este mude de valor.

69 Es evidente que quantas mas partes se concibieren en la unidad, tantas mas de estas partes se necesitarán para formar una misma cantidad. Porque las partes en que se concibiere dividida la unidad serán tanto menores, quanto mayor fuere su número. Si divido ó imagino dividida una unidad, sea la que fuere, en quincenos, será cada parte mayor que si se concibiese dividida la misma unidad en treintenos. Y si quisiere tomar un tercio de dicha unidad en

el

el primer supuesto, bastará que tome $\frac{5}{15}$, y en el segundo habré de tomar $\frac{10}{30}$.

70 Luego se puede duplicar, triplicar, quadruplicar &c. el denominador de un quebrado, sin que por esto mude de valor el quebrado, con tal que al mismo tiempo se duplique, triplique, quadruplique &c. el numerador.

Se puede, pues, decir en general, que *no muda de valor un quebrado quando se multiplican sus dos términos por un mismo número.*

Así $\frac{3}{4}$ es lo mismo que $\frac{6}{8}$: $\frac{1}{2}$ lo mismo que $\frac{2}{4}$ que $\frac{3}{6}$ que $\frac{5}{10}$ &c.

Discurriendo del mismo modo se echa de ver, que quantas menos partes se supusieren en la unidad, tantas menos de estas partes se necesitarán para formar una misma cantidad: que por consiguiente se puede, sin mudar un quebrado, hacer que su denominador sea 2, 3, 4 &c. veces menor, con tal que al mismo tiempo se transforme su numerador en otro 2, 3, 4 &c. veces menor: y en general, *no muda de valor un quebrado quando se dividen sus dos términos por un mismo número.*

Para percibir con evidencia la verdad de estas dos proposiciones, basta tener presente qual es el oficio del denominador y del numerador de un quebrado.

Adviértase, pues, que multiplicar ó dividir los dos términos de un quebrado por un mismo número, no es multiplicar ni dividir el quebrado, pues segun acabamos de ver, no muda de valor con estas operaciones.

Los

Digitized by Google

Los dos principios que acabamos de sentar son el fundamento de las dos reducciones siguientes, que son de muchísimo uso.

Reduccion de los Quebrados á un mismo Denominador.

72 I.° Para reducir dos quebrados á un mismo denominador, se han de multiplicar los dos términos del primero, cada uno por el denominador del segundo, y los dos términos del segundo, cada uno por el denominador del primero.

Por egemplo, para reducir á un mismo denominador los dos quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplico 2 y 3 que son los dos *términos* del primer quebrado, cada uno por 4, denominador del segundo, y sale $\frac{8}{12}$ que es (70) del mismo valor que $\frac{2}{3}$.

Multiplico igualmente los dos términos 3 y 4 del segundo quebrado, cada uno por 3, denominador del primero, y sale $\frac{9}{12}$ que es del mismo valor que $\frac{3}{4}$; de suerte que los dos quebrados $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ son transformados en $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$ que son respectivamente de un mismo valor que los primeros, y tienen un mismo denominador.

Facil es hacerse cargo de que con este método será siempre uno mismo el denominador en cada uno de los nuevos quebrados, pues en cada operacion se forma el nuevo denominador de la multiplicacion de los dos denominadores primitivos.

73 II.° Si hubiese más de dos quebrados, se redu-

cirán todos á un comun denominador multiplicando los dos términos de cada uno por el producto que resultare de la multiplicacion de los denominadores de los demas quebrados.

Por egemplo, para reducir á un mismo denominador los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ multiplicaré los dos términos 2 y 3 del primero por el producto de los tres denominadorss 4, 5, 7 de los demas quebrados, cuyo producto hallo diciendo: 4 veces 5 son 20, despues 7 veces 20 son 140: multiplico, pues, 2 y 3, cada uno por 140, y saco $\frac{280}{420}$, cuyo valor es el mismo que el de $\frac{2}{3}$ (70).

Multiplico igualmente los dos términos 3 y 4 del segundo quebrado por el producto de 3, 5, 7, cuyo producto saco diciendo: 3 veces 5 son 15, despues 7 veces 15 son 105: multiplico, pues, 3 y 4 cada uno por 105, de cuya operacion resulta $\frac{315}{420}$; quebrado del mismo valor que $\frac{3}{4}$.

En quanto al tercer quebrado, multiplico sus dos términos 4 y 5 cada uno por 84, producto de los tres denominadores 3, 4 y 7, y sale $\frac{336}{420}$ en lugar de $\frac{4}{5}$.

Finalmente, multiplicaré los dos términos 5 y 7 del último quebrado cada uno por 60, producto de los denominadores 3, 4 y 5 de los tres primeros quebrados, y hallaré $\frac{300}{420}$ en lugar de $\frac{5}{7}$; de suerte que los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, estan transformados en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, menos sencillos á la verdad que los primeros, pero de igual valor y mas apropósito para egecutar con ellos, me-

Digitized by Google

mediante el denominador comun, las operaciones de sumar y restar.

Repárese que componiéndose el denominador de cada nuevo quebrado del producto de todos los denominadores primitivos, no puede este nuevo denominador dejar de ser el mismo en cada quebrado despues de la transformacion.

Reduccion de los Quebrados á su mas simple espresion.

74 Un quebrado es tanto mas simple quanto son menores sus dos términos. En muchas ocasiones es facil reducir un quebrado propuesto á números menores, quando su numerador y su denominador pueden ser divididos por un mismo número. Como esta operacion no muda el valor del quebrado (71), se debe practicar siempre que se pueda, ya porque es mas facil calcular los quebrados despues de esta reduccion, ya porque se percibe mas facilmente su valor en muchas ocasiones, ya finalmente porque falta un calculador á la simplicidad que en todas sus operaciones debe reynar, quando se vale de números mayores para espresar lo que se puede representar con números menores.

75 Se practíca como se sigue. Se partirán el numerador, y el denominador cada uno por 2, y se repetirá cada division quantas veces pudiere hacerse cabal.

Se partirán despues ambos términos por 3, y se repetirá esta operacion quanto se pudiere.

Lo mismo se practicará sucesivamente con los núme-

Digitized by Google

ros 5, 7, 11, 13, 17, &c. Esto es, con los números que no tienen otro divisor que á sí mismos, ó la unidad, y que llamamos *números primeros*.

Así no puede haber dificultad sino para saber quando se podrá partir por 2, 3, 5, &c.

Los principios siguientes facilitarán está investigacion.

76 Todo número cuyo último guarismo es par, es divisible por 2.

Todo número cuyos guarismos sumados unos con otros, como si espresasen unidades simples, fuere 3, ó *multiplo* de 3, esto es un número cabal de veces 3, será divisible por 3. Por egemplo, 54231 es divisible por 3, porque sus guarismos 5, 4, 2, 3, 1 componen el número 15 que es 5 veces 3.

Todo número cuyo último caracter es un 5, ó un cero es divisible por 5.

Por lo que toca al numero 7 y á los que se siguen, aunque sea facil hallar reglas semejantes, escusarémos traerlas, porque empeñan en cálculos tan prolijos como la operacion que se desea abreviar.

Propongámonos, por egemplo, reducir el quebrado $\frac{2016}{5796}$ á su menor espresion. Parto ambos términos por 2, porque el último guarismo de cada uno es par, y sale $\frac{1008}{2898}$. Parto otra vez por 2, y sale $\frac{504}{1449}$. De lo dicho arriba infiero que puedo partir por 3: egecuto la division en efecto, y sale $\frac{168}{483}$; vuelvo á partir por 3, con lo que saco co $\frac{56}{161}$; finalmente intento partir por 7; sale bien la division, y resulta $\frac{8}{23}$.

La razon que nos mueve á decir que no se intente la division sino por los números primeros 2, 3, 5, 7, &c. se funda en que despues de haber apurado la division por 2, por egemplo, es inutil intentar la division por 4; porque si esta pudiera practicarse, con mas razon hubiera podido egecutarse otra vez la division por 2.

77 De quantos medios se pueden practicar para reducir un quebrado á una espresion mas simple, el mas directo consiste en partir ambos términos por el mayor divisor comun que tubieren. La regla para hallar este mayor comun divisor es la siguiente.

Pártase el mayor de los dos términos por el menor; si no hubiere resta alguna, el término menor será el mayor divisor comun.

Si hubiese una resta, pártase por ella el término menor; y si saliere cabal la division, dicha primera resta será el mayor comun divisor.

Si despues de concluida esta segunda division, quedare una resta, pártase la primera resta por la segunda, y prosígase partiendo siempre por la última resta la antecedente, hasta llegar á una division cabal. Entónces el último divisor que hubiere servido, será el mayor divisor de ambos términos del quebrado.

Si se halláre ser la unidad el último divisor, será señal de que no se puede reducir el quebrado.

Digitized by Google

Sirva de egemplo el quebrado $\frac{3760}{9024}$.

Parto 9024 por 3760, sale 2 al cociente, y la resta 1504.

Parto 3760 por 1504, sale 2 al cociente, y la resta 752.

Parto la primera resta 1504 por la segunda 752; sale cabal la division, é infiero que 752 puede dividir ambos términos del quebrado $\frac{3760}{9024}$, y reducirle á su mas simple espresion que se halla, haciendo el cálculo, ser $\frac{5}{12}$

Con efecto, hemos hallado que 752 parte 1504; debe, pues, dividir tambien 3760, que, segun hemos visto, se compone de dos veces 1504 y de 752: se ve tambien que debe dividir 9024, pues 9024 se compone de dos veces 3760 y de 1504.

Se ve tambien que 752 es el mayor divisor comun que puedan tener 3760 y 9024; porque todo número que dividiere 9024 y 3760 ha de dividir tambien 3760 y 1504; y no puede haberle comun á estos dos, sin que sea al mismo tiempo divisor comun de 1504 y de 752; pero es evidente que estos dos números no pueden tener divisor comun mayor que 752, luego &c.

No hay duda en que dividiendo los dos términos de un quebrado por su mayor comun divisor, quedará reducido á su menor espresion. Porque hemos visto (71) que partiendo por un mismo número ambos términos de un quebrado, no muda este de valor. Y es constante que quanto mayor fuere el divisor, siendo

uno

uno mismo el dividendo, tanto menor ha de salir el cociente (47).

Diferentes modos de considerar un quebrado, y consecuencias que de esto se pueden sacar.

78 La idea que hasta aquí hemos dado de un quebrado, es que el denominador espresa de quantas partes está compuesta la unidad, y el numerador quantas de dichas partes contiene la cantidad que el quebrado representa.

Puédese considerar tambien de otro modo un quebrado: se puede considerar el numerador como que representa cierta cantidad, que debe dividirse en tantas partes quantas *unidades* hay en el denominador. Por egemplo en $\frac{4}{5}$ se puede considerar 4 como que representa quatro cosas qualesquiera, como quatro reales, por egemplo, que se han de partir en cinco partes; porque claro está que lo mismo es partir 4 reales en cinco partes, que partir un real en cinco partes para tomar quatro de ellas.

79 Se puede, pues, considerar el numerador de un quebrado como un dividendo, y el denominador como un divisor. Con esto se ve claramente que cosa significan las restas de divisiones, espresadas en la forma que digimos (48).

80 De esto y de lo dicho (64) se infiere que si en la resta de una division, espresada en forma de quebrado, el numerador valiere mas de la mitad del denominador, se podrá despreciar dicha resta espresada en forma de

Digitized by Google

quebrado, añadiéndole una unidad al guarismo último del cociente hallado. Pongo por caso que practicando una division, halle el cociente 23 y la resta $\frac{3}{4}$; puedo omitir la cantidad $\frac{3}{4}$ añadiéndole una unidad al último guarismo 3 del cociente, que con esto será 24. La razon es clara, porque yá que $\frac{3}{4}$ vale mas de la mitad del entero ó unidad (64), el cociente discrepará menos del verdadero, añadiéndole una unidad en lugar de la cantidad $\frac{3}{4}$, que si omitiese esta cantidad.

Esto puede practicarse quando no se quisiere hallar el verdadero cociente por el método que en adelante daremos, ó quando son de tan poca monta las partes en que se supone dividida la unidad, que no hay necesidad de espresarlas con mucha precision.

81 Infiérese de aquí que un entero se puede escribir, siempre que se quisiere, en forma de quebrado; haciendo que dicho entero sea el numerador, y dándole por denominador la unidad; así 8 ó $\frac{8}{1}$ son una misma cosa, 5 es lo mismo que $\frac{5}{1}$.

Operaciones de la Arismética con quebrados.

82 Se hacen con los quebrados las mismas operaciones que con los enteros. La adicion y la sustraccion requieren las mas veces una operacion preparatoria: las otras dos no requieren ninguna.

Adi-

Digitized by Google

Adicion de los Quebrados.

83 Si los quebrados tubiesen un mismo denominador, se sumarán todos los numeradores, y se la dará á la suma el denominador comun de dichos quebrados. Así para sumar $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, sumo los numeradores 2, 3, 5, y sale por consiguiente $\frac{10}{7}$ que reduzco á 1 $\frac{3}{7}$ (67).

84 Si no tubiesen los quebrados un mismo denominador, será menester transformarlos primero en otros que le tengan (72 y 73); hecho esto se sumarán los nuevos quebrados conforme se ha dicho. Así si hemos de sumar $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformo estos quebrados en estotros tres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, cuya suma es $\frac{133}{60}$ que se reduce á 2 $\frac{13}{60}$ (67).

Sustraccion de los Quebrados.

85 Si los dos quebrados propuestos tienen el mismo denominador, se restará el numerador del uno del numerador del otro, y se le dará á la resta el denominador comun á los dos. Si se ha de restar $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, la resta será $\frac{3}{9}$, que se reduce á $\frac{1}{3}$ (75).

86 Si de 9 $\frac{5}{8}$ se quisiere restar 4 $\frac{7}{8}$; como no se púede restar $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, se tomaria prestada del 9 una unidad, que reducida á octavos, y añadida á $\frac{5}{8}$, daría $\frac{13}{8}$, de los quales restando $\frac{7}{8}$, restaria $\frac{6}{8}$; restando despues 4 de 8, que quedan despues del préstamo, restará en todo 4 $\frac{6}{8}$ ó 4 $\frac{3}{4}$.

87 Si los quebrados no tienen un mismo denominador, se les dará (72 y 73): despues se hará la sustraccion, segun acabamos de decir. Así para restar $\frac{2}{3}$

de

de $\frac{3}{4}$, transformo estos quebrados en $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, y restando 8 de 9, resta $\frac{1}{12}$.

Multiplicacion de los Quebrados.

88 *Para multiplicar un quebrado por un quebrado, se debe multiplicar el numerador del uno por el numerador del otro, y el denominador por el denominador.* Por egemplo, para multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, se multiplicará 2 por 4, saldrá el numerador 8: multiplicando tambien 3 por 5, saldrá el denominador 15, y por consiguiente será $\frac{8}{15}$ el producto.

Para hacerse cargo de la razon de esta regla, conviene tener presente que multiplicar un número por otro, es tomar tantas veces el multiplicando quantas cabe la unidad en el multiplicador. Así multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, es tomar $\frac{4}{5}$ veces el quebrado $\frac{2}{3}$, ó, mas exactamente, es tomar 4 veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$; pero multiplicando el denominador 3 por 5, se transforman los tercios en quincenos, esto es, en partes cinco veces menores; y multiplicando el numerador 2 por 4, se toman estas nuevas partes 4 veces: se toma pues quatro veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$; se multiplica, pues, con efecto $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

89 Si ocurriese multiplicar un entero por un quebrado, se le daria al entero la forma de quebrado, dándole la unidad por denominador. Por egemplo, si se me ofrece multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, se reduce la operacion á multiplicar $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$, de lo que, segun la regla que hemos dado, sale el producto $\frac{36}{7}$ que se reduce á $5\frac{1}{7}$.

Se

Digitized by Google

Se ve, pues, que para multiplicar un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se reduce la operacion á multiplicar el numerador del quebrado propuesto por el entero.

90 Si hubiese enteros juntos con quebrados, se deberia, antes de egecutar la multiplicacion, reducir cada uno de dichos enteros á quebrados de la misma especie que el que le acompaña. Por egemplo, si hay que multiplicar 12 $\frac{3}{5}$ por 9 $\frac{3}{4}$, transformo (68) el multiplicando en $\frac{63}{5}$, y el multiplicador en $\frac{39}{4}$; y multiplico $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$, segun la regla arriba dada (88), de lo que resulta el producto $\frac{2457}{20}$ que vale 122 $\frac{17}{20}$.

Division de los Quebrados.

91 *Para dividir un quebrado por un quebrado, se deben trastornar los dos términos del quebrado que sirve de divisor, y despues se multiplicará el quebrado dividendo por dicho quebrado trastornado.*

Por egemplo, para dividir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, trastorno el quebrado $\frac{2}{3}$, y sale $\frac{3}{2}$; multiplico $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$, segun la regla dada (88), y sale el cociente $\frac{12}{10}$ que se reduce á 1 $\frac{2}{10}$.

Para hacerse cargo de la razon de esta regla, conviene considerar que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, es buscar quantas veces $\frac{4}{5}$ contiene $\frac{2}{3}$; pero es facil percibir que pues el divisor espresa tercios, será contenido en el dividendo tres veces mas que si espresase enteros: luego es menester dividir primero por 2, y multiplicar despues por 3, que es lo mis-

mo

mo que tomar tres veces la mitad del dividendo, ó multiplicarle por $\frac{3}{2}$, que es el quebrado divisor trastornado.

92 Si ocurriese partir un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se empezaria dándole al entero la forma de quebrado, y la unidad por denominador. Por egemplo, si ocurre partir 12 por $\frac{5}{7}$, se reducirá la operacion á partir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, que segun la regla que acabamos de dar, se reduce á multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, y sale el cociente $\frac{84}{5}$ ó $16\frac{4}{5}$. Igualmente si se ofreciese partir $\frac{3}{4}$ por 5, se reducirá la operacion á partir $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{1}$, esto es, á multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{5}$, y saldria el producto $\frac{3}{20}$.

Se ve, pues, que quando se ha de partir un quebrado por un entero, se reduce la operacion á multiplicar el denominador por dicho entero.

93 Si hubiese enteros juntos con los quebrados, se reducirian dichos enteros á quebrados, cada uno de la misma especie que el que le acompaña. Por egemplo, si se hubiese de partir $54\frac{3}{5}$ por $12\frac{2}{3}$ se transformaria el dividendo en $\frac{273}{5}$, y el divisor en $\frac{38}{3}$, y la operacion se reduciria á partir $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, esto es (91) á multiplicar $\frac{273}{5}$ por $\frac{3}{38}$, de lo que resultaria $\frac{819}{190}$, ó $4\frac{59}{190}$.

Algunas aplicaciones de las reglas antecedentes.

94 En virtud de lo dicho (78), facil es hacerse cargo de lo que se debe practicar para valuar un quebrado. Supongamos que se me pregunte, por egemplo, quanto valen los $\frac{5}{7}$ de un doblon. Ya que los $\frac{5}{7}$ de un doblon son lo

mis-

Digitized by Google

mismo (78) que el séptimo de 5 doblones, reduzco los 5 doblones á pesos (45), y parto los 20 pesos que resultan por 7: salen al cociente 2 pesos, y la resta 6 pesos que he de partir por 7: reduzco dichos 6 pesos á reales, y parto por 7 los 90 rs. que resultan: salen al cociente 12 reales, y la resta 6 reales que he de partir por 7: reduzco los 6 rs. á maravedis, parto por 7 los 204 maravedis que resultan, sale el cociente 29 maravedis y $\frac{1}{7}$ de maravedi; de suerte que los $\frac{5}{7}$ de un doblon valen 2 Pe. 12 rs. 29 mrs. $\frac{1}{7}$.

Si se pidiesen los $\frac{5}{7}$ de 24 doblones, es evidente que se podrian tomar desde luego, segun lo acabamos de practicar, los $\frac{5}{7}$ de un doblon, y multiplicar despues por 24 lo que hubiese resultado de esta operacion; pero es mucho mas cómodo multiplicar desde luego los $\frac{5}{7}$ por 24 doblones, de lo que resultan $\frac{120}{7}$ (89) doblones, y valuar despues este quebrado, cuyo valor se hallará que es 17 dob. 8 rs. 19 mrs. $\frac{3}{7}$.

95 Lo que hemos practicado en estos dos egemplos manifiesta que quando se trata de valuar un quebrado qualquiera, *se ha de multiplicar su numerador por el número que espresa quantas veces la unidad, á la qual se refiere el quebrado, contiene las partes en que queremos valuar el quebrado propuesto, y dividir despues el producto por el denominador que lleva el quebrado.* Así en el primer egemplo, en el qual hemos empezado valuando los $\frac{5}{7}$ de un doblon en pesos, hemos multiplicado el numerador 5 por 4, que espresa

las

las veces que cabe un peso en un doblon, y hemos partido el producto 20 por el denominador 7. Lo propio hemos practicado para valuar los quebrados de peso en reales &c.

96 La valuacion de los quebrados llama naturalmente nuestra atencion á considerar los *quebrados de quebrados*. Dase este nombre á una serie de quebrados separados los unos de los otros por la preposicion *de*. Por egemplo, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, &c. son quebrados de quebrados. Se reducen á un solo quebrado, multiplicando unos por otros todos los numeradores, y los denominadores tambien unos por otros; de suerte que el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ se reduce á $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$: el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ se reduce á $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Y con efecto bien se echa de ver que tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ no es mas que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, pues es tomar $\frac{2}{3}$ veces el quebrado $\frac{3}{4}$. Asimismo tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, viene á ser lo propio que tomar los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$, pues $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ son $\frac{6}{12}$; y lo que acabamos de decir manifiesta que los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ vienen á ser $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Si se pidiesen los $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$, se convertiria el entero 5 en octavos, y se reduciria la operacion á sacar el valor del quebrado de quebrado $\frac{3}{4}$ de $\frac{43}{8}$ que se hallaria ser $\frac{129}{32}$ ó $4\frac{1}{32}$.

De los Números complexos.

97 Aunque las reglas que hemos declarado hasta aquí, pudieran tambien aplicarse al cálculo de los números complexos, tenemos no obstante por conveniente considerar es-

Digitized by Google

estos de un modo particular, porque la division que en ellos se hace de la unidad principal suele facilitar el cálculo.

Hay muchas especies de números complexos, y las reglas que se dan para calcularlos, penden mucho de la division que se ha hecho de la unidad. Sin embargo no es necesario atender á todas estas especies para poderlos calcular; pero importa conocer la relacion que tienen unas con otras sus diferentes partes, y con la unidad principal. Por esta razon pondré aquí una tabla de los números complexos, cuyo uso es mas frecuente.

Tabla de las Unidades de algunas especies, y caracteres con que se representan.

Para las Monedas.

Pe. significa.......... Peso.	1 peso vale 15 reales.
rs.................. reales.	1 real 34 maravedis.
ms............ maravedis.	

Para los Pesos.

℔. significa.......... libra.	1 libra vale 2 marcos.
M................ marco.	1 marco 8 onzas.
O ó ℥.............. onza.	1 onza 8 dracmas.
G ó ʒ............ dracma.	1 dracma 3 escrúpulos.
℈............ escrúpulo.	1 escrúpulo 24 granos.
g................ grano.	

Pa-

Digitized by Google

Para la estension de las lineas.

V. significa.......... vara.	1 vara vale 3 pies.
P.................. pie.	1 pie 12 pulgadas.
p.............. pulgada.	1 pulgada 12 lineas.
l................. linea.	1 linea 12 puntos.
po............... punto.	

Para el tiempo.

D. significa.......... dia.	1 dia vale 24 horas.
h................ hora.	1 hora 60 minutos.
'............... minuto.	1 minuto 60 segundos.
''.............. segundo.	1 segundo 60 terceros.

Adicion de los Números complexos.

98 Para hacer esta operacion se escriben todos los números propuestos unos debajo de otros, de modo que todas las partes de una misma especie compongan una misma columna; y tirando una raya debajo de todo, se empezará la adicion por las partes menores. Si su suma no forma una unidad de la especie inmediatamente mayor, se escribirá debajo de las unidades de su especie: si contiene bastantes partes para formar una ó muchas unidades de la especie inmediatamente mayor, no se escribe debajo de dicha columna sino el exceso respecto de un número cabal de unidades de dicha segunda especie, y se llevan estas para juntarlas con sus semejantes, con las quales se practica lo mismo que con las primeras.

EGEM-

Digitized by Google

EGEMPLO I.

Se nos propone sumar

227 Pe.	14 rs.	8 ms.
2549.	13	15
184	11	11
17	10	7
2980.	4.	7.

La suma de los maravedis es 41, que contiene 34 maravedis ó un real, y 7 mrs: escribo los 7 mrs, y llevo 1 real, que junto con los reales, y hallo 49 reales: y como 15 reales componen un peso, y 49 reales son 3 veces 15 reales, ó tres pesos y 4 reales mas, escribo 4 debajo de la columna de los reales, y llevo los tres pesos para juntarlos con las unidades de los pesos, cuya suma hallo, que es 2980.

EGEMPLO II.

54 V.	2 P.	3 p.	9 l.
12	1	4	11
9	2	11	11
8	2	9	10
86	0	6	5

La suma de las lineas llega á 41, que son 3 pulgadas y 5 lineas: pongo 5 lineas, y llevo las 3 pulgadas, que junto

 con

con las pulgadas: me sale la suma 30 que valen 2 pies y 6 pulgadas: escribo las 6 pulgadas, y llevo los 2 pies, que añadidos á los pies, me dan 9 pies, que valen 3 varas cabales: pongo cero debajo de la columna de los pies: porque no resta ninguna que apuntar, y añado las tres varas con las varas: la suma asciende á 86: de suerte que la suma es 86 V. o P. 6 p. 5 l.

Sustraccion de los Números complexos.

99 Escríbanse los números propuestos como en la adicion, y empiécese la sustraccion por las unidades de menor especie. Si el número inferior se puede restar del superior, escríbase la resta debajo. Si no se puede restar, tómese prestada de la especie inmediatamente superior una unidad, que se reducirá á la especie de que se trata, y se añadirá al número, del qual no se puede restar su inferior. Practíquese lo propio en cada especie; y quando hubiere habido precision de tomar prestado, disminúyase de una unidad el número, del qual se hubiese quitado lo que se tomó: finalmente escríbase cada resta á medida que se halláre debajo del número que la hubiere dado.

EGEMPLO I.

De.........	143 Pe.	14 rs.	8 ms.
quiero restar	75	10	20
	68	3	22

Como no puedo restar 20 ms. de 8 ms, tomo prestado do 1 real que vale 34 mrs, y 8 son 42, de los quales restando 20, resta 22: resto despues 10 rs, no de 14 rs, sí de 13 que quedan por razon del préstamo, y resta 3: finalmente resto 75 pesos de 143 pesos, y restan 68 Pe.

EGEMPLO II.

De...........	163 Pe.	0 rs.	5 ms.
quiero restar	84	14	30
	78	0	9

Como no puedo restar 30 ms. de 5 ms. y tampoco hay rs. de que tomar prestado, tomo prestado un peso de los 163; pero con el pensamiento dejo 14 rs. en lugar del cero, y añado 1 r. que compone 39 mrs. con los 5 que hay: y hecho esto hago la operacion como arriba.

Multiplicacion de los Números complexos.

100 Se puede reducir generalmente la multiplicacion de los números complexos á la multiplicacion de un quebrado por otro quebrado, de cuya operacion ya se dió la regla (88 ii). Por egemplo, si se preguntase quanto ha de costar una obra de 54 V. 2 P. á razon de 18 Pe. 5 rs. 15 ms. la vara: se puede reducir todo el multiplicando 18 Pe. 5 rs. 15 ms. á maravedises (45), y resultarán 9365 mrs. y como el maravedi es la 510ma parte del peso, se puede representar el multiplicando por $\frac{9365}{510}$ de peso: se reducirá igualmente todo el multiplicador

dor 54 V. 2 P. todo á pies y resultarán 164 pies; y como el pie es la tercera parte de la vara, será el multiplicador $\frac{164}{3}$ de vara; de suerte que está reducida la operacion á multiplicar $\frac{2365}{510}$ de peso por $\frac{164}{3}$ de vara: de cuya multiplicacion resulta $\frac{1535860}{1530}$ (88) de peso, que valen 1003 Pe. 12 rs. 15 ms. (94).

101 Pero se pueden multiplicar unos por otros los nùmeros complexos sin reducirlos á quebrado. Antes de declarar cómo se hace la operacion, es del caso prevenir què quando se han de multiplicar uno por otro dos números, cuyas unidades son de distinta especie, se ha de tomar por multiplicando aquel cuyas unidades fueren de la misma especie que las que ha de espresar el producto. Si quiero saber, por egemplo, quanto importan 12 varas de paño á 50 rs. la vara, he de considerar como multiplicando el número 50 rs. pues el producto ha de espresar reales: porque en este caso han de salir al producto tantas veces 50 rs. quantas varas hay, esto es 12 veces.

De lo que se infiere que el multiplicador es siempre un número abstracto, que no (6) espresa unidades ni partes de unidad de determinada especie, sino quantas veces se ha de tomar el multiplicando. En el egemplo propuesto el multiplicador 12 es un número abstracto, y debe ser así, porque si le considerásemos como que representa 12 varas, y practicásemos la multiplicacion, concebiríamos un absurdo, pues lo seria multiplicar varas por reales.

102 Sentado esto, que segun se echa de ver, debe en-

entenderse de los números complexos igualmente que de los incomplexos, hay tres reglas que practicar quando se quieren multiplicar uno por otro dos números complexos. 1.° Se han de reducir ambos á la menor especie que contienen. 2.° Se multiplicarán uno por otro despues de hecha esta reduccion. 3.° Se dividirá el producto por el número que espresa quantas veces la unidad mayor del multiplicador contiene la menor: el cociente será el producto que se busca. Pero como este producto espresará las unidades menores del multiplicando, se podrá reducir á las unidades mayores del mismo multiplicando, si se quisiere. Los exemplos aclararán todo lo dicho.

EGEMPLO I.

Se pregunta quanto importan 4 V. 2 P. 8 p.
costando cada vara .... 2 Pe. 3 rs. 4 ms.

Reduzco 2 Pe. 3 rs. 4 ms. á las menores unidades que este número contiene, esto es á maravedises, y salen 1126 ms. Reduzco tambien las 4 V. 2 P. 8 p. á pulgadas, y salen 176 p. 2.° Multiplico 1126 por 176: sale el producto 198176. 3.° Divido este producto por 36 que espresa quantas veces la mayor unidad del multiplicador, que es la vara, contiene la menor, que es la pulgada. Salen al cociente 5504 ms. y $\frac{32}{36}$ ó $\frac{8}{9}$ de maravedi; y porque vale cerca de un maravedi, añado una unidad al último guarismo del cociente hallado, que será por consiguiente 5505. Practicando lo que digimos (57), hallarémos que estos maravedises valen 10 pesos, 11 reales y 31 mrs.

Digitized by Google

EGEMPLO II.

Qué ganancia han de dár 10 Pe. 3 rs. 4 ms. en el supuesto de que cada peso dá 3 Pe. 2 rs. 6 ms. de ganancia?

Por la pregunta se conoce que hemos de multiplicar 3 Pe. 2 rs. 6 ms. por 10 Pe. 3 rs. 4 ms. 1.° Reduzco 3 Pe. 2 rs. 6 ms. á 1604 ms. y el multiplicando á 5206 ms. 2.° Multiplico 1604 por 5206, sale el producto 8350424 ms. 3.° Divido este producto por 510, que espresa quantos maravedises caben en un peso, salen al cociente 16373 ms. y $\frac{194}{510}$ de maravedi, que será facil reducir á pesos y reales, por lo dicho (57), y saldrán 32 Pe. 1 r. 19 ms.

De las tres operaciones que hay que practicar para multiplicar uno por otro dos números complexos, las dos primeras se perciben facilmente: solo la tercera pide que manifestemos su fundamento. Vamos á egecutarlo aplicando lo que digéremos al egemplo primero. Si valiese cada pulgada 1126 ms. no hay duda en que 4 V. 2 P. 8 p. ó 176 p. valdrian 198176 ms. por ser este número el producto de 1126 por 176. Pero 1126 ms. son por lo supuesto el precio de la vara, y no de la pulgada: luego ya que la vara vale 36 pulgadas, el precio de la vara es 36 veces menor que el de la pulgada, ó que el producto 198176: y así para sacar en maravedises el precio de 176 pulgadas, se debe partir 198176 por 36.

103 Si se hubiesen de multiplicar uno por otro dos nú-

números complexos, que espresasen cada uno medidas de longitud, quales serian estos dos 5 V. 1 P. 6 p. y 3 V. 2 P. 3 p: en este caso se omitiría la tercera operacion que hemos declarado, y formaría el producto una superficie, conforme manifestarémos en la Geometría.

De la Division de los Números complexos.

104 Se les hará muy facil esta operacion á los que se hubiesen hecho cargo de lo que hemos dicho respecto de la antecedente y de sus fundamentos. Solo prevengo que, así como en la multiplicacion de los números complexos se considera el multiplicador como (101) un número abstracto, en la division de los mismos números se considera, en algunos casos, como número abstracto el divisor, y en otros el dividendo. La naturaleza de las cuestiones que dan motivo para esta division, determina qual de estos dos números debe mirarse como número abstracto.

Supongamos que habiendo costado 7 M. 2 O, 346 Pe. 14 rs. 6 ms. se pregunte, á quanto sale el marco. La pregunta manifiesta por sí que hallarémos el valor de cada marco dividiendo los 346 Pe. 14 rs. 6 ms. por 7 M. 2 O.

105 Para egecutar esta division, es menester 1.° hacer que el divisor exprese unidades de la menor clase que contiene. 2.° Practicar la division empezando por las unidades mayores del dividendo, para hacer despues lo propio con las que se les siguen. 3.° Multiplicar todo el cociente

E 4 por

Digitized by Google

por el número que espresa quantas veces la menor unidad del divisor cabe en la mayor.

106 Si despues de hecha la division de las unidades mayores del dividendo, pongo por caso de los pesos, hubiese alguna resta, se deberia reducir esta resta á reales, y añadir los que saliesen de esta reduccion á los que llevaba ya el dividendo, á fin de dividir despues la suma por el divisor que hubiere dividido los pesos. Si hubiese tambien alguna resta, despues de divididos los reales, se reduciría á maravedises, se juntarian con los que hubiese ya en el dividendo, y se dividiría la suma por el mismo divisor.

Apliquemos el método al egemplo propuesto. 1.° Reduzco todo el divisor 7 M. 2 O. á 58 onzas. 2.° Divido 346 Pe. 14 rs. 6 ms. por 58, empezando por los pesos, y sale el cociente 5 Pe. y la resta 56 que reduzco á reales, multiplicándola por 15: sale el producto 840, al qual añado los 14 rs. del dividendo: sale la suma 854 que divido por 58 y sale el cociente 14 rs. y la resta 42, que reduzco á 1428 ms, con los quales junto los 6 del dividendo, y sale la suma 1434 que divido por 58, y salen 24 ms. y el quebrado $\frac{42}{58}$ que espresa partes del maravedi. 3.° Multiplico este cociente por 8, porque caben 8 onzas en el marco: el producto es 47 Pe. 12 rs. 27 ms. y $\frac{46}{58}$ de maravedi, cantidad despreciable.

EGEMPLO II.

55 V. y tres quartas de paño han costado 642 Pe.

12

12 rs 8 ms, se pregunta á como sale la vara? Es menester 1.° reducir las 55 V. $\frac{3}{4}$ á quartas, que son las unidades menores del divisor. Las 55 varas componen 220 quartas, á las que añadiendo las $\frac{3}{4}$ del quebrado, compondrán 223 quartas, cuya cantidad será el divisor. Empezando la division por las unidades mayores del dividendo, hallo el cociente 2 Pe. y la resta 196, que reducida á reales (45), y añadiéndola los 12 rs. que hay en el dividendo, dá 2952, que he de dividir por 223; sale el cociente 13, y la resta 53, que reducida á maravedises, y añadiéndola los 8 que hay en el dividendo, dá 1810 ms, que divido por 223, y hallo el cociente 8 y el quebrado $\frac{26}{223}$ que es una parte despreciable de maravedi. Hallo, pues, el cociente total 2 Pe. 13 rs. 8 ms. que multiplico por 4, pues la unidad menor del divisor cabe 4 veces en la mayor, y sale el verdadero cociente 11 Pe. 7 rs. 32 ms. que es á lo que sale cada vara.

107 Resta manifestar la razon del tercer artículo del método, porque los dos primeros se perciben facilmente; y para egecutarlo aplicarémos el razonamiento al egemplo primero. Es evidente que dividiendo 346 Pe. 14 rs. 6 ms. por 58, el cociente que sale es el valor de una onza, pues espresa onzas el divisor 58. Por consiguiente para sacar el valor del marco que buscamos, se ha de multiplicar el cociente hallado por el número 8 que espresa de quantas onzas se compone el marco.

108 Quando el divisor es un número incomplexo

no

no se practican el primero, y tercer artículo del método. Si 26 arrobas de vino, por egemplo, hubiesen costado 1467 rs. 31 ms. y quisiésemos saber á cómo sale cada arroba, bastaria dividir por 26 primero los reales, y despues los ms. del dividendo, añadiéndoles los que espresáre la resta procedente de la division de los reales por 26.

109 En los egemplos que hemos propuesto debe considerarse el divisor como un número abstracto, porque solo espresa en quantas partes iguales se ha de dividir el dividendo. Pero en otros casos se debe mirar el cociente como un número abstracto, porque solo espresa quantas veces cabe el divisor en el dividendo.

Si se nos propusiese la division de 67 Pe. 12 rs. 6 ms. por 5 Pe. 4 rs. 6 ms. es evidente que solo se busca un número que esprese quantas veces cabe el divisor en el dividendo. Pero en este caso se debe reducir el dividendo á la menor cantidad del divisor antes de practicar la division. En el egemplo que aquí proponemos, el dividendo será 34584, 2692 el divisor, y sale el cociente 12 $\frac{2280}{2692}$. En las cuestiones parecidas á esta, se echa de ver que es escusado practicar el tercer artículo del método, pues para saber quantas veces cabe el divisor en el dividendo, basta hallar quantas veces todas las unidades menores que hay en el divisor, caben en las unidades de la misma clase que hay en el dividendo, y queda hecha la operacion.

Digitized by Google

De las Cantidades decimales.

110 Ya es tiempo de declarar el método particular que ofrecimos (19) para dividir y subdividir la unidad en varias partes, cuyo método dá muchísima facilidad para los cálculos. Consiste en dividir la unidad en partes de tal naturaleza, que cada una es diez veces menor que la primera, y que por esta razon llamamos *Decimales.* Bien se echa de ver que un número que contiene solas partes decimales es un quebrado, y que es fraccionaria toda cantidad, que ademas de contener un cierto número de unidades, contiene tambien partes decimales de la unidad que espresa. Como las decimales se calcúlan con la misma facilidad que los enteros, son de muchísimo uso en todos los ramos de la Matemática; y con algunos egemplos manifestarémos quan fundada es la preferencia que han merecido respecto de los quebrados comunes.

111 Para valuar en decimales las partes menores que la unidad, se concibe que esta unidad, sea la que fuere, peso, vara, &c. se compone de 10 partes, al modo que se concibe la decena compuesta de diez unidades simples, ó como imaginamos el peso compuesto de 15 rs. Estas nuevas unidades, contrapuestas á las decenas, se llaman *décimas*; se espresan con los mismos guarismos que las unidades simples; y como son diez veces menores que estas, se colocan al lado del guarismo que representa las unidades simples, ácia la derecha.

Pero con el fin de escusar las equivocaciones que podrian

Digitized by Google

drian padecerse si se tomasen estas décimas por unidades simples, se ha determinado fijar con una señal particular el lugar de las unidades; la señal que para esto mas se usa es una coma puesta al lado del guarismo que espresa las unidades ácia la derecha, ó, lo que es lo mismo, entre las unidades y las *décimas*; así para espresar veinte y quatro unidades, y tres décimas, se escribirá 24, 3.

112 Podemos tambien considerar ahora las décimas como unidades compuestas de otras diez, cada una diez veces menor que las *décimas*, y por la misma razon de analogía escribirlas al lado, ácia la derecha, de las décimas. Estas nuevas unidades diez veces menores que las décimas, serán cien veces menores que las unidades principales, y por esta razon las llamarémos *centésimas*. Así para espresar veinte y quatro unidades tres décimas y cinco *centésimas*, escribirémos 24, 35.

113 Concibamos igualmente las *centésimas* como compuestas de diez partes: estas partes serán mil veces menores que la unidad principal, por cuya razon se llamarán *milésimas*, y por ser diez veces menores que las centésimas, se escribirán á su lado ácia la derecha. Prosiguiendo esta division de diez en diez, se formarán nuevas unidades, que llamaremos sucesivamente *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, *diezmillonésimas*, *cienmillonésimas* &c, que escribirémos en lugares tanto mas distantes de la coma, ácia la derecha, quanto menores fueren dichas partes.

Las

Digitized by Google

114 Las partes de la unidad de que acabamos de hablar, se llaman *decimales*.

115 En quanto al modo de pronunciarlas ó leerlas, es el mismo que se usa respecto de los números enteros. Despues de haber pronunciado los guarismos que están antes de la coma ácia la izquierda, se pronuncian las decimales del mismo modo; pero al fin se añade el nombre de las unidades decimales de la última especie. Así para pronunciar este número 34, 572, diríamos treinta y quatro unidades, y quinientas setenta y dos milésimas; si fuesen varas, por egemplo, diríamos treinta y quatro varas, y quinientas setenta y dos milésimas de vara.

No es dificultoso hacerse cargo de la razon de este modo de leer las decimales, si se considera que en el número 34, 572, el guarismo 5 puede representar, como quisiéremos, ó cinco *décimas*, ó quinientas *milésimas*; porque valiendo la décima (112) 10 *centésimas*, y la *centésima* (113) 10 *milésimas*, la décima contendrá diez veces diez *milésimas*, ó 100 *milésimas*, por lo que las 5 décimas valen 500 *milésimas*. Por la misma razon podremos pronunciar el 7 diciendo *setenta milésimas*, porque cada *centésima* (113) vale 10 milésimas.

116 Por lo que mira á la especie de las unidades del último guarismo, se hallará siempre con facilidad contando sucesivamente desde la izquierda á la derecha en ca-

Digitized by Google

cada guarismo desde la coma, con los nombres siguientes: *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, &c.

117 Si no hubiese unidades enteras, y no hubiera de espresar un número sino partes de la unidad, se escribiría un cero en lugar de las unidades. Así para representar 125 *milésimas*, se escribiría 0, 125. Si quisiéramos representar 25 *milésimas*, escribiríamos 0, 025, poniendo un cero entre la coma y los demas guarismos, ya para señalar que no hay *décimas*, ya para dar á las partes que se siguen su verdadero valor. Por la misma razon pintaríamos seis *diezmilésimas* de este modo 0, 0006.

118 Consideremos ahora las diferencias que pueden resultar en el valor de un número, mudando el lugar de la coma.

Ya que determina la coma el lugar de las unidades, y que todos los demas guarismos tienen valores dependientes de su distancia á la misma coma; si se escribe la coma uno, dos, tres &c. lugares mas adelante, ácia la izquierda, se muda el número en otro 10, 100, 1000 &c. veces menor; y al contrario será 10, 100, 1000 &c. veces mayor, si se pone la coma uno, dos, tres &c. lugares mas ácia la derecha.

La razon es muy clara, porque si tubiésemos el número 4327, 5264, y escribiésemos 432, 75264 colocando la coma un lugar mas ácia la izquierda: es manifiesto que los mil del primer número son centenares en el segundo: los centenares son decenas: las decenas son uni-

da-

Digitized by Google

dades : las unidades , décimas : las décimas , centésimas , y así prosiguiendo. Luego cada parte del primer número ha llegado á ser 10 veces menor con la transposicion de la coma. Si transponiendo al contrario la coma en un lugar mas ácia la derecha , hubiésemos escrito 43275 , 264 , los mil del primer número representarian decenas de mil : los centenares, mil : las decenas , centenares : las unidades , decenas : las décimas serian unidades : las centésimas , décimas , y así prosiguiendo. Luego el nuevo número es 10 veces mayor que el primero.

119 Discurriendo del mismo modo probaríamos que colocando la coma dos ó tres lugares mas ácia la izquierda , se transformaria el número en otro 100 ó 1000 veces menor , y que seria 100 ó 1000 veces mayor si se colocase la coma dos ó tres lugares mas ácia la derecha.

120 Observarémos finalmente respecto de las decimales que no se muda su valor escribiendo á continuacion del último guarismo decimal el número de ceros que se quisiere. Así 43 , 25 es lo mismo que 43 , 250 , ó que 43 , 2500 , ó que 43 , 25000.

Porque como cada *centésima* vale 10 *milésimas* ó 100 *diezmilésimas* &c : las 25 *centésimas* han de valer 250 *milésimas* , ó 2500 *diezmilésimas* &c. En una palabra , esto es lo mismo que si , en lugar de decir 25 doblones , digéramos 100 pesos , ó 150 libras en lugar de 6 arrobas.

Adi-

Adicion de las Partes Decimales.

121 Como las decimales se cuentan del mismo modo que los números enteros, por decenas, á medida que se vá de la derecha á la izquierda, la regla para sumarlas es de todo punto la misma, observando que las unidades de una misma clase deben ocupar una misma columna.

Así si se tratase de sumar los tres números 72, 957... 12, 8... 124, 03

escribiré............ 72, 957
12, 8
124, 03

209, 787

y procediendo como en los egemplos antecedentes (22 y sig.) sacaré la suma 209, 787.

De la Sustraccion de las Partes Decimales.

122 Para restar una cantidad decimal de otra, se practicará de todo punto la misma regla que para restar un número entero de otro; pero para escusar tropiezos en su aplicacion, bastará hacer que sea uno mismo el número de guarismos decimales en cada uno de los dos números propuestos, escribiendo el número correspondiente de ceros á continuacion del que tubiere menos decimales. Esta preparacion no altera el valor de dicho número (120).

EGEM-

EGEMPLO.

De. . . . . 5403 , 25
se quiere restar. . . . . . . 385 , 6532

Pongo dos ceros á continuacion de las decimales del número superior : hecho esto, hago la sustraccion con los dos números así preparados , exactamente del mismo modo que si fuesen números enteros.

$$\begin{array}{r} 5403,2500 \\ 385,6532 \\ \hline 5017,5968 \end{array}$$

y hallo que la resta es 5017 , 5968.

De la Multiplicacion de las Partes Decimales.

123 Para multiplicar las partes decimales se practicará la misma regla que para los enteros , sin hacer caso alguno de la coma; pero despues de hallado el producto , se separarán en este, ácia la derecha , tantos guarismos quantas decimales hubiere en el multiplicador y el multiplicando juntos.

EGEMPLO I.

Se ha de multiplicar. . . . . 54 , 23
por. . . . . 8 , 3

$$\begin{array}{r} 16269 \\ 43384 \\ \hline 450,109 \end{array}$$

Multiplicaré 5423 por 83, el producto será 450109; y como hay dos decimales en el multiplicando y una en el multiplicador, separaré tres guarismos á la derecha de dicho producto, que con esto será 450, 109: el que debe ser en la realidad.

Es facil hacerse cargo de la razon en que estriba esta regla, considerando que si el multiplicador fuese 83, el producto no contendria sino *centésimas* en las partes decimales, porque se hubiera repetido 83 veces el multiplicando 54, 23, cuyas decimales son centésimas; pero como el multiplicador es 8, 3, esto es (111) diez veces menor que 83, debe contener el producto unidades diez veces menores que las *centésimas*: luego el último guarismo de sus decimales debe espresar (113) *milésimas*: luego ha de haber tres guarismos decimales en dicho producto, esto es, tantos como hay en el multiplicando y en el multiplicador juntos.

El mismo raciocinio se puede aplicar á otro caso qualquiera.

EGEMPLO II.

Si se nos propusiese la multiplicacion de 0,12;
por............................ 0,3

0,036

Multiplicaríamos 12 por 3, y saldria el producto 36. Como enseña la regla que se separen en este caso tres guarismos, pudiera causar algun embarazo ver que el producto-ducto no tiene sino dos; pero si atendemos al raciocinio con que probamos la práctica de esta regla en el egemplo antecedente, echarémos de ver facilmente que es preciso, como aquí se vé, interponer un cero entre 36 y la coma. Con efecto, si hubiésemos de multiplicar 0, 12 por 3, es constante que saldria el producto 0, 36; pero como se ha de multiplicar por 0, 3, esto es, por un número diez veces menor que 3, ha de salir un producto diez veces menor que 0, 36, esto es que esprese milésimas, y esto se verifica con escribir (118) 0,036.

De la Division de las Partes Decimales.

124 Por no detenernos en distinciones inútiles, reducirémos la division de las decimales á sola esta regla.

Escríbase á continuacion del número de los dos propuestos que tiene menos decimales, un número bastante de ceros, para que sea uno mismo en ambos el número de las decimales (esto no mudará (120) el valor de dicho número): bórrese la coma en ambos, y hágase la operacion como con los números enteros: nada habrá que mudar en el cociente que se halláre.

EGEMPLO.

Se propone la division de 12, 52 por 4, 3.

Escribo............. 12, 52 | 4, 3

ó mejor............. 12, 52 | 4, 30

completando el número de decimales.

Digitized by Google

Borrando la coma tengo que dividir 1252 por 430, haciendo la operacion

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline 392 & 2\,\frac{392}{430} \end{array}$$

hallo 2 al cociente, y la resta 392: quiero decir que el cociente es $2\,\frac{392}{430}$.

125 Pero como valiéndose de las decimales se lleva la mira de escusar los quebrados comunes: en vez de escribir la resta 392 en forma de quebrado, como se ha practicado, se proseguirá la operacion como en el egemplo siguiente.

EGEMPLO.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline 3920 & 2,9116 \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Despues de haber hallado el cociente en enteros, que en este egemplo es 2, se pondrá un cero al lado de 392, cuyo cero hará á la verdad que este número sea diez veces mayor de lo que debe ser: se proseguirá dividiendo por 430, y habiendo hallado que se debe escribir 9 al cociente, se escribirá con efecto; pero despues de haber señalado el lugar de las unidades enteras con escribir la coma despues del 2: así el 9 no espresará sino décimas.

He-

Digitized by Google

Hecha la multiplicacion y la sustraccion, se pondrá un cero al lado de la resta 50, que es lo mismo que si al principio se le hubiesen añadido dos al dividendo; pero escribiendo despues del 9 el cociente 1 que se halláre, se le dará con esto su verdadero valor, pues entónces espresa centésimas: se proseguirá así la operacion quanto se tuviere por necesario. Ciñéndonos á dos decimales, sacamos el cociente, que no discrepa del verdadero de una centésima parte: prosiguiendo hasta tres guarismos, se saca un cociente que no discrepa del verdadero de una milésima parte: y así prosiguiendo, pues no se hubiera podido escribir una unidad mas ó menos, sin hacer el cociente ó mayor ó menor de lo que debe ser.

Falta declarar 1.° por que el borrar la coma en el dividendo y en el divisor nada altera el cociente; despues de haber hecho igual en cada uno el número de las decimales: esto es fácil de entender, porque en el egemplo propuesto, el dividendo 12, 52, y el divisor 4, 30 no son sino 1252 centésimas, y 430 centésimas, pues las unidades enteras valen centenares de centésimas (112); pero claro está que 1252 centésimas no contienen de otra manera 430 centésimas, que 1252 unidades 430 unidades: luego es inutil atender á la coma, una vez que se han completado las decimales.

2.° Porque en el caso de añadirle un cero, por egemplo, á la resta 392 no resulta error alguno en la operacion, con tal que al cociente se le ponga en un lugar donde valga 10 veces menos que si expresase unidades. Es constante que añadiéndole un cero á un dividendo, le hago 10 veces mayor; pero si al tiempo que egecuto la division por un número determinado, hago que el cociente valga 10 veces menos, con esto compenso el aumento que le dí al dividendo con añadirle un cero. Puede aplicarse este razonamiento á los casos en que se le añaden mas ceros al dividendo.

126 Por lo dicho hasta ahora respecto de las decimales se echa de ver, que se calcúlan con la misma facilidad que los números enteros. Por consiguiente será muy del caso, siempre que ocurran quebrados, reducirlos, si se quiere, á decimales, y saldrán mas fáciles las operaciones que con dichos quebrados se ofreciesen hacer. Esta reduccion se funda en lo que acabamos de decir (125).

Así si se quiere reducir $\frac{4253}{9678}$ á decimales y sacar su valor con diferencia de menos de una milésima de unidad, se deberá dividir 4253000 por 9678, cuya operacion dará 439: de suerte que será 0,439 el valor de $\frac{4253}{9678}$, con diferencia de menos de una milésima parte.

Algunos usos de las Decimales.

127 Declarado yá el modo de reducir á decimales qualquiera quebrado (126), facil será hacerse cargo de lo que se deberá practicar, quando se quisiere reducir tambien á decimales un número complexo qualquiera.

Su-

Digitized by Google

Supongamos que queramos reducir 3 V. 2 P. 8 p. 7 lineas á decimales de la vara, de modo que no se omita una media linea. Reparo que la vara contiene 432 lineas, y por consiguiente 864 medias lineas: cuyo número manifiesta que si no quiero omitir una media linea, he de llevar la aproximacion mas allá de las centésimas, esto es, hasta las milésimas: porque si me contentára con llevarla hasta las centésimas no mas, omitiendo una centésima, omitiría una de las 864 medias lineas que componen la vara, y erraría por consiguiente el intento.

Sentado esto, reduzco los 2 P. 8 p. 7 l. todo á lineas, y salen 391 lineas ó $\frac{391}{432}$ de la vara: transformando esta cantidad en decimales, hasta las milésimas, por el método arriba (126) declarado, salen 0, 905, de donde infiero que el número propuesto vale 3 V., 905.

Si quisiésemos reducir 8 Pe. 4 rs. 5 ms. á decimales del peso, de manera que no omitiésemos medio maravedi: consideraríamos, que pues el peso vale 15 rs, y el real 34 mrs, cada peso vale (45) 510 maravedises, ó 1020 medios maravedises, y que por consiguiente la decimal que busco ha de llegar hasta las diez milésimas. Reduzco los 4 rs. 5 mrs. á maravedises, y salen 141 ó $\frac{141}{510}$ del peso. Reduzco esta cantidad á decimal hasta las diez milésimas, y hallo que la cantidad propuesta 8 Pe. 4 rs. 5 ms. vale 8 Pe., 2764.

128 Resta saber ahora cómo se ha de valuar una

Digitized by Google

cantidad decimal, esto es, cómo haríamos para saber, por egemplo, quántos rs. y mrs. valen las 0, 2764 de un peso. Para hallar el método que hemos de practicar, basta tener presente que una cantidad decimal es un quebrado (110), y que para valuar un quebrado, se ha de multiplicar el numerador por el número que espresa quántas veces la unidad, en que deseo determinar el valor del quebrado, cabe en la unidad á la qual el quebrado pertenece, y dividir el producto por el denominador (95): quiero decir, que buscando en reales el valor de un quebrado de peso, he de multiplicar el numerador por 15, porque 15 rs. componen un peso, y partir el producto por el denominador que llevare el quebrado propuesto.

Pero como las decimales no llevan denominador, para valuarlas basta con la multiplicacion, y se ahorra el calculador el trabajo de dividir el producto por el denominador: bastará, pues, en el caso propuesto multiplicar 0, 2764 por 15. Por donde se manifiesta quánto se abrevian las operaciones, usando de las decimales.

Sentado esto, multiplico 0, 2764 por 15, sale el producto 4, 1460, esto es 4 rs. y 0, 1460 de real. Para valuar esta última cantidad, multiplícola por el número 34 que espresa quántos maravedises componen un real: hallo el producto 4,9640, esto es 4 ms. y 0,9640 de maravedi, que dentro de poco declararémos lo que viene á valer con poca diferencia.

Por

Digitized by Google

Por este método hallaría que 0,5687 de vara valen 1 P. 8 p. 5 l. y 0,6784 de linea.

129 Con igual facilidad hallarémos un método para valuar una decimal de otra qualquiera unidad, como si se nos preguntase quánto valen 0,0046 de vara, importando cada vara 17 rs. Ya que un real vale 34 ms. y en el caso actual importa 17 rs. cada vara, será de 17 veces 34 ms. el valor de la vara (35). Multiplico, pues, la decimal propuesta 0,0046 por el producto de 17 por 34: esto es, por 578: el producto 2,6588 manifiesta que, costando cada vara 17 rs, las 0,0046 de vara importan 2 ms. y 0,6588 de maravedi.

130 Por esta última operacion se echa de ver que, haciendo uso de las decimales, no se deben poner muchas, sino quando se necesita suma exactitud, y esto lo manifiestan las mismas cuestiones que dan motivo á las operaciones: bastan comunmente una, dos, ó á lo más tres decimales.

Porque ya hemos visto lo que importan 0,0046 de vara, dando 17 rs. por vara. Pero si se pagase una obra á 10000 rs. por egemplo, la vara, practicando el método declarado (129) hallaríamos que las 0,0046 de vara importarian 46 rs. que merecen alguna consideracion.

131 Es de advertir que quando se omite un guarismo en una cantidad decimal, si este pasa de 5, se le debe añadir una unidad al último guarismo de los que

que-

quedaren. Supongamos, por egemplo, que provenga esta cantidad 0,386 de una cuestion para cuya resolucion me basten los dos primeros guarismos, ó la cantidad 0,38. Como el 6 que omito pasa de 5, añadiré una unidad al 8, y tendré 0,39.

La razon es clara: porque como diez unidades de la columna que ocupa el 6, ó 10 milésimas valen una unidad de la columna que ocupa el 8, ó una centésima (113); quando omito el 6, omito mas de la mitad de una centésima, y añadiéndole una unidad al 8, le añado á toda la cantidad propuesta 0,386 menos de lo que le quitára, contentándome con borrar solamente el 6.

Si se omitiesen dos guarismos decimales que valiesen mas de 50, se le debería añadir una unidad al último guarismo que quedase: es facil percibir la razon de esta práctica.

Así quando hallamos arriba (128) que las 0,2764 de un peso valen 4 rs. 4 ms. y 0,9640 de maravedi, en lugar de 4 ms. escribo 5 ms, porque la decimal 0,9640 de maravedi se acerca muchísimo al valor entero de un maravedi, pues el primer guarismo 9 espresa 9 décimas de maravedi.

De la formacion de los Números quadrados, y de la estraccion de sus raices.

132 Llámase *quadrado* de un número el producto que resulta multiplicando dicho número por el mismo: 25 es

es el quadrado de 5, porque 25 resulta de la multiplicacion de 5 por 5.

133 La *raiz quadrada* de un número propuesto es el número que multiplicado por sí mismo reproduciría dicho número propuesto: así 5 es la raiz quadrada de 25: 7 es la raiz quadrada de 49.

134 Un número que quadramos es, pues, multiplicando y multiplicador á un mismo tiempo: es, pues, dos veces factor (31) del producto: por esta razon este producto ó quadrado se llama tambien *segunda potencia* de dicho número.

135 Para dar á entender que un producto se compone de dos factores iguales, ó que es un quadrado, pongo por caso, para significar que se representa el quadrado de una cantidad, por egemplo de 4, se escribe de este modo 4^2 ó $(4)^2$, que significa que 4 es dos veces factor en el producto que resultáre. Si la cantidad constáre de muchos guarismos, y fuese, por egemplo, 234, representaríamos su quadrado de este modo $(234)^2$ ó de este otro $\overline{234}^2$.

Y para representar la raiz quadrada usamos de esta señal $\sqrt{}$ que se llama *signo radical*, escribiendo el guarismo 2 entre sus dos piernas. Así la raiz quadrada de 64, por egemplo, se señala $\sqrt[2]{64}$.

Pero comunmente se omite el 2 puesto entre las piernas del signo radical, y se escribe de este modo $\sqrt{64}$. Quando tiene muchos guarismos la cantidad, como si fuese 3458,

se

Digitized by Google

se señala la raiz quadrada en esta forma $\sqrt{(3458)}$.

136 Para quadrar un número no se necesita de mas artificio que multiplicarle por el mismo, segun las reglas ordinarias de la multiplicacion; pero para estraer la raiz quadrada de un número, esto es, para volver del quadrado á la raiz, es preciso socorrerse de algun método particular, á lo menos quando el número ó quadrado propuesto tiene mas de dos guarismos.

Quando el número propuesto no tiene sino uno ó dos guarismos, su raiz en número entero es alguno de los números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

cuyos quadrados son

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Así la raiz quadrada de 72, por egemplo, es 8 en número entero: porque hallándose 72 entre 64 y 81, su raiz estará entre las raices de estos dos, esto es, entre 8 y 9: es 8 y un quebrado, de cuyo quebrado no podemos hallar á la verdad el valor cabal; pero podemos aproximarnos á él continuamente, conforme lo veremos dentro de poco.

137 La raiz quadrada de un número que no es un quadrado perfecto, se llama un número *sordo*, *irracional* ó *incomensurable*.

138 Tratemos de los números que tienen mas de dos guarismos.

Considerando lo que pasa en la formacion del quadrado, ha-

Digitized by Google

hallarémos el método que se debe seguir para volver á la raiz.

Para quadrar un número como 54, por egemplo,

54
54
216
270
2916

despues de haber escrito el multiplicando y el multiplicador, como se vé aquí, multiplicamos, por el método ordinario, el 4 superior por el 4 inferior, de lo que resulta evidentemente el *quadrado de las unidades*.

Multiplicamos despues el 5 superior por el 4 inferior, de lo que resulta el *producto de las decenas por las unidades*.

Pasamos despues al segundo guarismo del multiplicador, y multiplicamos el 4 superior por el 5 inferior: de lo que resulta el producto de las unidades por las decenas, ó (33.) el *producto de las decenas por las unidades*.

Finalmente, multiplicamos el 5 superior por el 5 inferior, de lo que resulta el *quadrado de las decenas*.

Sumamos estos productos, y sale que el quadrado de 54 es el número 2916, que segun vemos, se compone del *quadrado de las decenas*, *mas de dos veces el producto de las decenas por las unidades*, *mas del quadrado de las unidades del número* 54.

139. Como lo que acabamos de observar se sigue in-

Digitized by Google

inmediatamente de las reglas de la multiplicacion, se verifica no solo en el número 54, sino tambien en otro qualquiera que conste de decenas y unidades: de suerte que podemos decir generalmente que el quadrado de todo número compuesto de decenas y unidades constará de las tres partes que acabamos de especificar, es á saber, del quadrado de las decenas de dicho número, de dos veces el producto de las decenas por las unidades, y del quadrado de las unidades.

140 Sentado esto, como el quadrado de las decenas espresa centenares (pues 10 veces 10 son 100), es evidente que este quadrado de las decenas no puede hallarse en los dos últimos guarismos del quadrado total.

Como el producto del duplo de las decenas multiplicado por las unidades espresa necesariamente decenas, no puede hallarse tampoco en el último guarismo del quadrado total.

141 Luego, para volver del quadrado 2916 á su raiz, se puede discurrir del modo siguiente.

EGEMPLO I.

2916	54 raiz.
416	
104	
000	

Empecemos buscando las decenas de esta raiz; pero la for-

formacion del quadrado nos enseña que el quadrado de estas decenas se halla en 2916, y que dicho quadrado no puede estar en los dos últimos guarismos: está, pues, en 29; y como la raiz quadrada de 29 no puede ser mayor que 5, inferirémos que el número de las decenas de la raiz es 5, y le escribirémos al lado de 2916, como se vé.

Quadro 5, y resto el producto 25 de 29: resta 4, á cuyo lado bajo los otros dos guarismos 16 del número propuesto 2916.

Para hallar ahora las unidades de la raiz, considero lo que contiene la resta 416: no contiene sino dos partes del quadrado, es á saber, el duplo de las decenas de la raiz multiplicado por las unidades, y el quadrado de las unidades de esta misma raiz.

De estas dos partes basta la primera para que hallemos las unidades que buscamos, porque ya que se compone del duplo de las decenas multiplicado por las unidades, si la dividimos por el duplo de las decenas que conocemos, el cociente debe espresar (56) las unidades. Resta solo saber en qué parte de 416 se halla dicho duplo de las decenas multiplicado por las unidades; pero segun hemos visto arriba, no puede hallarse en el último guarismo: está, pues, en 41. Debemos, pues, partir 41 por el duplo 10 de las decenas, y egecutando la division, el cociente 4 que sale, es el número de las unidades que busco, y le escribo, ácia la derecha, al lado

de

de las 5 decenas halladas: de suerte que la raiz que buscamos es 54.

Pero es de considerar que, aunque el cociente 4 que acabamos de hallar, sea con efecto el que conviene, no obstante puede suceder algunas veces, que el cociente hallado de este modo sea mayor de lo que conviene: porque 41 (esto es la parte que queda despues de separado el último guarismo) incluye no solo el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, sino tambien las decenas procedentes del quadrado de las unidades: por lo que, para no tener duda alguna sobre el guarismo de las unidades, es preciso usar de la verificacion siguiente.

Habiendo hallado el guarismo 4 de las unidades, y habiéndole escrito á la raiz, le escribo al lado del duplo 10 de las decenas, con lo que sale el número 104, cuyos guarismos los multiplico todos sucesivamente por el mismo número 4, y resto los productos sucesivos de las partes correspondientes de 416: como no resta nada, infiero que la raiz es con efecto 54.

Si quedase alguna resta, no dejaría la raiz hallada de ser la verdadera raiz en números enteros, á no ser que dicha resta fuese mayor que el duplo de la raiz aumentado de la unidad; pero no hay que temer este tropiezo, quando se toma el cociente siempre el mayor que se puede.

La verificacion que acabamos de enseñar se funda en la formacion misma del quadrado: porque es evidente que

que multiplicando 104 por 4, sale el quadrado de las unidades, y el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, esto es, lo que completa el quadrado perfecto.

142 De lo que acabamos de decir se debe inferir que, para sacar la raiz quadrada de un número que no tiene mas que quatro guarismos ni menos de tres, se debe buscar, despues de haber separado dos guarismos ácia la derecha, la raiz quadrada de los que quedan ácia la izquierda; será esta raiz el número de las decenas de la raiz total que se busca, y se escribirá al lado del número propuesto, tirando entre los dos una raya.

Se restará de los mismos guarismos el quadrado de la raiz que se hubiere hallado; y escribiendo la resta debajo de la misma porcion, se bajarán al lado de esta resta los dos guarismos que se hubieren separado.

Se separará con una coma el guarismo de las unidades de la porcion que se acabáre de bajar, y se dividirá lo que se halláre al otro lado de la coma ácia la izquierda por el duplo de las decenas, escribiéndole debajo.

Se escribirá el cociente al lado del primer guarismo de la raiz, y despues se escribirá al lado del duplo de las decenas que hubiere servido de divisor.

Finalmente se multiplicarán por el mismo cociente todos los guarismos que se hallaren en esta última linea, y se restarán sus productos á medida que se hallaren, de los guarismos que les corresponden en la linea que estubiere encima. Aclararémos todo esto con un egemplo.

Digitized by Google

EGEMPLO II.

Se pide la raiz quadrada de 7569.

75,69	87 raiz.
11 6,9	
1 6 7	
0 0 0	

Separo los dos guarismos 69, y busco la raiz quadrada de 75; es 8: escribo 8 al lado: quadro 8, y de 75 resto el quadrado 64: resta 11 que escribo debajo de 75, y al lado de 11 bajo los guarismos 69 que habia separado.

Separo en 1169 el último guarismo 9, á fin de que sea 116 la parte que he de dividir para hallar las unidades.

Formo mi divisor doblando las 8 decenas que he hallado, y escribo este divisor debajo de 116: la division me dá 7 por cociente, que escribo á la raiz, á continuacion de 8.

Pongo tambien este cociente al lado del divisor 16: multiplico 167, que forma la última linea, por el mismo cociente 7, y á medida que hallo los productos, los resto de 1169: no resta nada, y esto prueba que 7569 es un quadrado perfecto, y el quadrado de 87.

143 Conviene tener muy presente que no se debe partir por el duplo de las decenas, sino sola la parte que queda ácia la izquierda, despues de haber separado el último

mo

mo guarismo, de suerte, que si no cupiese en ella el duplo de las decenas, no por esto deberíamos hacer uso del guarismo separado; se pondria, sí, cero á la raiz. Si al contrario el duplo de las decenas cupiese mas de 9 veces en dicha parte, no por esto se deberia poner mas de 9 á la raiz: la razon es la misma que para la division (54).

144 El que estubiese bien enterado de lo que acabamos de decir sobre la raiz quadrada de los números que no tienen mas de quatro guarismos, se impondrá facilmente en lo que se debe practicar quando el número de los guarismos fuere mayor. De qualquier número de guarismos que haya de constar la raiz, se puede siempre concebir compuesta de dos partes, la una de las quales espresará decenas, y la otra unidades: por egemplo, podemos considerar 874 como compuesto de 87 decenas, y 4 unidades.

Sentado esto, despues de haber hallado los dos primeros guarismos de la raiz por el método que hemos declarado, por el mismo se puede hallar tambien el tercero, considerando dichos dos primeros guarismos como un solo número de decenas, y aplicándoles para hallar el tercero, todo lo que hemos dicho del primero para hallar el segundo.

Despues de hallados los tres primeros guarismos, si ha de haber otro, se considerarán los tres primeros como que componen un solo número de decenas, al qual se aplicará para hallar el quarto, lo mismo que se hubiere practi-

Digitized by Google

ticado con los dos primeros para hallar el tercero; y así prosiguiendo.

Pero para mayor seguridad se debe empezar partiendo el número propuesto en porciones de dos guarismos cada una, yendo de la derecha á la izquierda: pero podrá suceder que en la última no haya sino uno.

Fúndase esta preparacion en que considerando la raiz como compuesta de decénas y unidades, se debe empezar, en virtud de lo dicho arriba (140 y sig.), por separar los dos últimos guarismos ácia la derecha, para que se halle en la porcion que queda á la izquierda, el quadrado de las decenas; pero como esta parte se compone tambien de mas de dos guarismos, igual razon mueve á separar dos mas ácia la derecha; y así prosiguiendo.

Darémos un egemplo de esta operacion.

EGEMPLO III.

Se pide la raiz quadrada de 76807696.

```
76,80,76,96 | 8764 raiz.
 12,80
  167
 -----
 1117,6
  1746
 -------
  7009,6
  17524
 -------
  00000
```

Ha-

Habiendo partido el número propuesto en proporciones de dos guarismos cada una, yendo de la derecha ácia la izquierda, busco qual es la raiz quadrada de la porcion 76 que está mas ácia la izquierda: hallo que es 8, y pongo 8 al lado del número propuesto: quadro 8, y resto el quadrado 64, de 76; me sale la resta 12 que escribo debajo de 76: al lado de esta resta bajo la porcion 80, cuyo último guarismo separo con una coma: y debajo de la parte 128, escribo 16 duplo de la raiz hallada: despues digo, en 128 quantas veces 16? hallo que cabe 7 veces: pongo 7 á continuacion de la raiz 8 y al lado del duplo 16: multiplico 167 por este mismo número 7, y resto de 1280 el producto de esta multiplicacion: me sale 111, á cuyo lado bajo la porcion 76, lo que compone 11176. Separo el último guarismo 6 de este número, y debajo de la parte 1117 que queda á la izquierda, escribo 174, duplo de la raiz 87: divido 1117 por 174, y habiendo hallado 6 por cociente, escribo 6 á la raiz y al lado del duplo 174: multiplico 1746 por el mismo número 6, y resto el producto de 11176, resta 700: al lado de esta resta bajo 96, cuyo último guarismo separo: debajo de 7009, que queda á la izquierda, escribo 1752 duplo de la raiz hallada 876; y dividiendo 7009 por 1752, hallo por cociente 4, que escribo á la raiz y al lado del duplo 1752. Multiplico 17524 por el mismo número 4, y resto el producto de 70096: no resta nada: así la raiz quadra-

Digitized by Google

da de 76807696 es exactamente 8764.

145. Quando el número propuesto no es un quadrado perfecto, queda una resta al fin de la operacion, y la raiz quadrada que ha salido, es la raiz quadrada del mayor quadrado contenido en el número propuesto: entónces no es posible sacar la raiz quadrada exactamente; pero se puede hallar, por aproximacion, una raiz tan inmediata á la verdadera como se quisiere: esto es, de modo que levantando al quadrado la raiz hallada por esta aproximacion, saldrá un número que discrepará del propuesto, de una cantidad tan despreciable como se quisiere.

Esta aproximacion se executa facilmente por medio de las decimales. Se deben concebir á continuacion del número propuesto, dos veces tantos ceros quantas decimales se quisiere en la raiz: se hará despues la operacion por el método ordinario, y se separará despues con una coma, á la derecha de la raiz, un número de decimales igual á la mitad del número de los ceros que se hubiesen añadido á continuacion del número propuesto. Con efecto (123) ya que el producto de la multiplicacion de un número decimal por otro decimal ha de llevar tantas decimales quantas hay en ambos factores juntos, el quadrado (cuyos dos factores son iguales) debe, pues, tener otras tantas mas de las que tiene el uno de los factores; esto es, el duplo de las que debe tener la raiz.

EGEM-

Digitized by Google

EGEMPLO.

Se pide la raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima.

Para representar milésimas son menester tres decimales: se le deben pues añadir seis ceros al quadrado 87567: y así se debe sacar la raiz quadrada de 87567000000.

```
8,75,67,00,00,00     | 295,917 raíz.
47,5
 49
-----------
 346,7
  585
-----------
  5420,0
   5909
-----------
   10190,0
    59181
-----------
    427190,0
     591827
-----------
     129111
```

Haciendo la operacion como en los egemplos antecedentes, hallamos por raiz quadrada, con diferencia de menos de una unidad, el número 295917 : esta raiz es la de 87567000000; pero como se busca la de 87567, ó de 87567,000000, separo en la raiz un número de guarismos igual á la mitad de los ceros que añadí al quadrado; con lo que me sale 295,917 que es la raiz

Digitized by Google

quadrada de 87567, con diferencia de menos de una milésima.

Así si se pidiere la raiz quadrada de 2 con diferencia de menos de una diezmilésima, se sacará la raiz quadrada de 200000000, que se hallará ser 14142: separando los quatro guarismos de la derecha con una coma, saldrá 1,4142 que será la raiz quadrada de 2, aproximada hasta menos de una diezmilésima.

146 Hemos visto (88) que para multiplicar un quebrado por un quebrado, se debia multiplicar el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador: por consiguiente, para quadrar un quebrado, es menester quadrar el numerador y el denominador: así el quadrado de $\frac{2}{3}$ es $\frac{4}{9}$, el de $\frac{4}{5}$ es $\frac{16}{25}$.

147 Luego recíprocamente para sacar la raiz quadrada de un quebrado, se debe sacar la raiz del numerador y la del denominador: así la raiz quadrada de $\frac{9}{16}$ es $\frac{3}{4}$, porque la de 9 es 3, y la de 16 es 4.

148 Pero puede suceder que el numerador, ó el denominador, ó ninguno de los dos sea un quadrado perfecto: quando solo el numerador no es un quadrado perfecto, se sacará su raiz aproximada por el método que acabamos de esplicar, y sacando la raiz del denominador, se pondrá por denominador de la raiz hallada del numerador: así si se pide la raiz de $\frac{2}{9}$, se sacará la raiz aproximada del numerador 2, y saldrá 1,4; ó 1,41; ó 1,414; ó 1,4142 &c. segun se quisiere mas ó menos aproxi-

Digitized by Google

ximada: y como la raiz quadrada de 9 es 3, la raiz aproximada de $\frac{2}{9}$ será la cantidad $\frac{1,4}{3}$ ó $\frac{1,41}{3}$ ó $\frac{1,414}{3}$ ó $\frac{1,4142}{3}$.

149 Pero si el denominador no fuere un quadrado perfecto, se multiplicarán ambos términos del quebrado por el mismo denominador, con lo que no se muda el valor del quebrado, y será dicho denominador un quadrado. Hecho esto, se practicará lo que en el caso precedente. Por egemplo, si se pide la raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, se transformará este quebrado en $\frac{15}{25}$: sacando la raiz quadrada de 15, hasta tres decimales, por egemplo, saldrá 3,872: y como la raiz quadrada de 25 es 5, la raiz quadrada de $\frac{3}{5}$ ó $\frac{15}{25}$ será $\frac{3,872}{5}$.

150 Por escusar muchas especies de quebrados á un tiempo, se reducirá la cantidad $\frac{3,872}{5}$ á solo quebrado decimal, dividiendo 3,872 por 5, y será 0,774 la raiz de $\frac{3}{5}$ espresada por solas decimales (126).

151 Finalmente si hubiera enteros juntos con quebrados, se reducirian los enteros á quebrados (68), y se practicaría lo mismo que hemos dicho para un quebrado. Así para sacar la raiz quadrada de $8\frac{3}{7}$, se transformará $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, y este (148) en $\frac{413}{49}$, del qual se hallaria que la raiz aproximada es $\frac{20,322}{7}$, ó 2,903.

152 Tambien se puede reducir á decimales el quebrado que acompaña al entero; pero es preciso tener cuidado de valerse para esto de un número de decimales par, y doblado del que se quiere en la raiz; porque una vez que el producto de la multiplicacion de dos números que tienen decima-

les

Digitized by Google

les, debe tener tantas quantas hay en los dos factores juntos (123), el quadrado de un número que tiene decimales, deberá tener otras tantas mas que dicho número. Aplicando este método á $8\frac{3}{7}$, se transformará en 8,428571 (126), cuya raiz es 2,903 como arriba.

153 Si se hubiera de sacar la raiz quadrada de una cantidad decimal; se deberia primero procurar que fuera par, si no lo fuese el número de sus decimales: esto se conseguirá poniendo á continuacion de sus decimales uno, ó tres, ó cinco &c. ceros: esto no muda el valor de la cantidad decimal (120). Así para sacar la raiz quadrada de 21,935 con diferencia de menos de una milésima, saco la raiz quadrada de 21,935000 que es 4,683: es tambien la de 21,935. Por el mismo método se hallará tambien, que la de 0,542 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,736, y que la de 0,0054 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,073.

De la formacion de los números Cubos, y de la estraccion de su Raiz.

154 Para formar lo que llamamos el *cubo* de un número, es menester primero multiplicar dicho número por sí mismo, y multiplicar despues por el mismo número el producto que resulta de la primera multiplicacion.

Es, pues, el cubo de un número, hablando con propiepiedad, el producto del quadrado de un número, multiplicado por el mismo número: 27 es el cubo de 3, porque resulta de la multiplicacion de 9, que es el quadrado de 3, por el mismo número 3.

Por consiguiente el número que se cuba es tres veces factor en el cubo. Esta es la razon por que el cubo se llama tambien *tercera potencia*, ó *tercer grado* de dicho número.

155 En general, se dice que un número está elevado á su segunda, tercera, quarta, quinta potencia &c. quando se le ha multiplicado por sí mismo una, dos, tres, quatro &c. veces de seguida, ó quando es dos veces, tres veces, quatro veces, cinco veces, &c. factor en el producto.

156 La *raiz cúbica* de un cubo propuesto es el número que multiplicado por su quadrado, produce dicho cubo: así 3 es la raiz cúbica de 27.

157 No se necesitan, pues, reglas para formar el cubo de un número; pero es menester valerse de algun método para retroceder desde el cubo á su raiz.

Inferirémos este método de lo que viéremos que pasa en la formacion del cubo.

Observemos sin embargo que no es menester método alguno para sacar la raiz cúbica en números enteros, sino quando el número propuesto tiene mas de quatro guarismos: porque una vez que 1000 es el cubo de 10, todo número menor que 1000, y que por consiguiente tubiere menos de quatro guarismos, tendrá por raiz un número me-

Digitized by Google

menor que 10: esto es, menos de dos guarísmos.

Así todo número que se halláre entre dos de estos

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729

tendrá su raiz cúbica en número entero entre los dos números correspondientes que siguen,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

cuyos cubos contiene la primera.

158 No todo número tiene raiz cúbica; pero podemos hallar por aproximacion un número que si se cuba, se acercará mas y mas al número propuesto; cuya operacion declararémos mas adelante, despues que hayamos esplicado el método para hallar la raiz de un cubo perfecto.

159 Veamos, pues, de qué partes se compone el cubo de un número que tiene decenas y unidades.

Ya que el cubo de un número resulta de su quadrado multiplicado por el mismo número, es importante tener presente (139) que el quadrado de un número compuesto de decenas y unidades incluye 1.° el quadrado de las decenas. 2.° dos veces el producto de las decenas por las unidades. 3.° el quadrado de las unidades.

Se deben, pues, multiplicar estas tres partes por las decenas y por las unidades del número propuesto para formar su cubo.

A fin de distinguir mejor los productos que resultan, darémos á esta operacion la forma que representa la plana siguiente.

El

Digitized by Google

1.°

El quadrado de las decenas	multiplicado por las decenas dará	el cubo de las decenas.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades.		dos veces el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
El quadrado de las unidades		el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.

2.°

El quadrado de las decenas	multiplicado por las unidades dará	el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.
El quadrado de las unidades		el cubo de las unidades.

Lue-

Luego juntando estos seis resultados, y sumando los que son semejantes, se echa de ver, que el cubo de un número compuesto de decenas y unidades contiene quatro partes: es á saber, el cubo de las decenas, tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por la unidades, tres veces las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades, y finalmente el cubo de las unidades.

Formemos, en virtud de esto, el cubo de un número compuesto de decenas y unidades, de 43, por egemplo:

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Tomarémos, pues, el cubo de 4 que es 64; pero como este 4 espresa decenas, su cubo espresará millares, porque el cubo de 10 es 1000: así el cubo de 4 decenas será 64000.

3 veces 16, ó 3 veces el quadrado de las 4 decenas multiplicado por las 3 nnidades, dará 144 centenares, porque el quadrado de 10 es 100: así este producto será 14400.

3 veces 4, ó 3 veces las 4 decenas multiplicadas por el quadrado 9 de las unidades, darán decenas, y este producto será 1080.

Fi-

Finalmente el cubo de las unidades rematará en el lugar de las unidades y será 27.

Sumando estas quatro partes, se hallará que 79507 es el cubo de 43, cuyo cubo se hubiera hallado, sin duda alguna, mas facilmente, multiplicando 43 por 43, y despues por 43 el producto 1849: pero si hemos tomado un camino mas largo, no ha sido con sola la mira de formar el cubo, sino tambien para investigar, enterándonos de qué partes se compone, un método para estraer la raiz.

160 Sentado esto, para la estraccion de la raiz cúbica se practica lo siguiente.

EGEMPLO I.

Supongo que se pide la raiz cúbica de 79507.

Cubo..............	79,507	43 raiz.
	15 5,07	
	48	

Para hallar la parte de este número que contiene el cubo de las decenas de la raiz, separo lo tres últimos guarismos, en los quales hemos visto no puede hallarse este cubo, porque vale millares.

Busco la raiz cúbica de 79: es 4, que escribo al lado. Cubo 4, y resto el producto 64 de 79: resta 15, que escribo debajo de 79.

Al lado de 15 bajo 507, y resulta 15507, en el qual ha de haber 3 veces el quadrado de las 4 decenas halladas, multiplicado por las unidades que buscamos: mas

Digitized by Google

3 veces estas mismas 4 decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades: mas finalmente el cubo de las unidades.

Separo los dos guarismos 07: la parte 155 que queda á la izquierda, incluye 3 veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades: y así á fin de hallar las unidades (56) partiré esta parte 155 por el triplo del quadrado de las 4 decenas, esto es, por 48.

Hallo que 48 cabe 3 veces en 155: pongo, pues, 3 á la raiz.

Para probar esta raiz, y hallar la resta, si la hay, podríamos componer las tres partes del cubo que deben hallarse en 15507, y ver si componen 15507, ó de qué cantidad discrepan de este número; pero es igualmente cómodo hacer esta prueba cubando sobre la marcha 43, esto es, multiplicando 43 por 43, de lo que sale 1849, y multiplicando este producto por 43, de lo que resulta finalmente 79507. Así 43 es exactamente la raiz cúbica de 79507.

Si el número propuesto tubiere mas de seis guarismos se discurrirá como en el egemplo siguiente.

EGEM-

Digitized by Google

EGEMPLO II.

Se ha de sacar la raiz cúbica de 596947688.

```
596,947,688   |842
  849,47,     ------
  192
592704
------------
    424368,88
    21168
596947688
------------
000000000
```

Considerarémos su raiz como compuesta de decenas y unidades, y por esto empezarémos separando los tres últimos guarismos.

Como la parte 596947 que contiene el cubo de las decenas, tiene mas de tres guarismos, su raiz tendrá mas de uno, y por consiguiente tendrá decenas y unidades: es menester, pues, para hallar el cubo de estas primeras decenas, separar los tres guarismos 947.

Sentado esto, busco la raiz cúbica de 596: es 8: escribo este 8 al lado.

Cubo 8, y resto el producto 512 de 596: resta 84 que escribo debajo de 596.

Al lado de 84 bajo 947, y sale 84947, de cuyo número separo los dos últimos guarismos 47.

Debajo de la parte 849 escribo 192, que es el triplo del quadrado de la raiz 8, y divido 849 por 192:

Digitized by Google

hallo el cociente 4, y le escribo á la raiz.

Para verificar esta raiz, y hallar al mismo tiempo la resta, cubo 84, y resto el producto 592704 del número 596947: sale la resta 4243.

Al lado de esta resta bajo la porcion 688, y considerando la raiz como un solo número que espresa las decenas de la raiz que busco, separo los dos últimos guarismos 88 de la porcion que bajé, y divido la parte 42436 por el triplo del quadrado de 84, esto es, por 21168: hallo por cociente 2, que escribo á continuacion de 84.

Para verificar la raiz 842, y sacar la resta, si la hay, cubo 842, y resto el producto 596947688 del número propuesto 596947688, y como no queda nada, infiero que 842 es la raiz cúbica exacta de 596947688.

Es de advertir 1.° que en el discurso de estas operaciones nunca se debe poner mas de 9 á la raiz. 2.° que si el guarismo que se pone á la raiz fuese muy grande, no se podria egecutar la sustraccion, por lo que se le habrian de quitar succesivamente una, dos, tres &c unidades, hasta que se pudiese hacer la sustraccion.

Quando el número propuesto no es un cubo perfecto, la raiz que se halla, no es sino una raiz aproximada, y pocas veces basta sacarla en números enteros.

Son muy socorridas las decimales para continuar esta aproximacion tanto como se quiera: pero ni aun con esto se puede hallar una raiz exacta.

161 Para aproximarse quanto se quisiere á la raiz cú-

cúbica de un cubo imperfecto, se deben poner á continuacion de dicho número tres veces mas ceros que las decimales que se quieren poner en la raiz: se hará la estraccion como en los egemplos antecedentes, y concluida la operacion, se separarán con una coma en la raiz, ácia la derecha, tantos guarismos quantas decimales se desearen.

EGEMPLO.

Se propone la aproximacion de la raiz cúbica de 8755 con diferencia de menos de una centésima. Para hallar centésimas en la raiz, esto es, dos decimales, es preciso que el cubo ó el número propuesto tenga seis (1 2 3) : es, pues, menester escribir seis ceros á continuacion de 8755.

Así se reduce la cuestion á sacar la raiz cúbica de 8755000000.

8,755,000,000	20,61
07,55,	
12	
8000	
7550,00	
1200	
8741816	
131840,00	
127308	
8754552981	
447019	

Se-

Segun se dixo arriba, parto este número en porciones de tres guarismos cada una, yendo de la derecha ácia la izquierda.

Saco la raiz cúbica de la última porcion 8: es 2, que pongo á la raiz: cubo 2, y resto el producto de 8: queda la resta 0, al lado de la qual bajo la porcion 755, y separo los dos últimos guarismos 55: debajo de la parte restante 7, escribo 12, triplo del quadrado de la raiz, y dividiendo 7 por 12, hallo cero por cociente, y le escribo á la raiz.

Cubo la raiz 20: saco 8000, que resto de 8755: queda la resta 755, al lado de la qual bajo la porcion 000, y separo dos guarismos ácia la derecha: debajo de la parte restante 7550, escribo 1200, triplo del quadrado de la raiz 20, y dividiendo 7550 por 1200, saco el cociente 6, que escribo en la raiz.

Cubo la raiz 206, y resto el producto de 8755000: queda la resta 13184, al lado de la qual bajo la última porcion 000, y separo los dos últimos guarismos. Debajo de la parte restante 131840, escribo 127308 triplo del quadrado de la raiz hallada 206. Divido 131840 por 127308: saco el cociente 1 que escribo á continuacion de 206. Cubo 2061, y restando de 8755000000 el producto 8754552981, queda la resta 447019.

La raiz cúbica aproximada de 8755000000 es, pues, 2061: luego la de 8755,000000 es 20,61, pues el cubo tiene tres veces mas decimales que su raiz (123).

Si

Digitized by Google

Si se quisiera llevar mas adelante la aproximacion, se añadirian tres ceros á continuacion de la resta, y se proseguiría del mismo modo que se ha hecho cada vez que se ha bajado una porcion.

162 Ya que para multiplicar un quebrado por un quebrado, se debe multiplicar el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador: para cubar una fraccion, se deberá tambien cubar su numerador y su denominador. Luego recíprocamente, para sacar la raiz cúbica de un quebrado, se deberá sacar la raiz cúbica del numerador y la raiz cúbica del denominador. Así la raiz cúbica de $\frac{27}{64}$ es $\frac{3}{4}$, porque la raiz cúbica de 27 es 3, y la de 64 es 4.

163 Pero si solo el denominador fuere un cubo, se sacará la raiz aproximada del numerador, y á esta raiz se la dará por denominador la raiz cúbica del denominador. Por egemplo, si se pide la raiz cúbica de $\frac{143}{343}$, como el numerador no es un cubo, saco su raiz aproximada, que será 5, 22, con diferencia de menos de una centésima, y sacando la raiz de 343, que es 7, será $\frac{5,22}{7}$ la raiz aproximada de $\frac{143}{343}$, ó reduciendo á decimales (126), será 0,74 dicha raiz aproximada con diferencia de menos de una centésima.

164 Si el denominador no fuere un cubo, se multiplicarán ambos términos del quebrado por el quadrado de dicho denominador: y siendo entónces el nuevo denominador un cubo, se practicará lo que se acaba de decir.

Digitized by Google

Por egemplo, si se pide la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$, multiplico el numerador y el denominador por 49, quadrado del denominador 7: sale $\frac{147}{343}$ que (70) es de igual valor que $\frac{3}{7}$. La raiz cúbica de $\frac{147}{343}$ es $\frac{5,27}{7}$, ó reduciéndole á decimales, 0,75: es, pues, 0,75 la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$ con diferencia de menos de una centésima.

Si hubiese enteros juntos con quebrados, se transformaría todo en quebrados, y se reduciría la cuestion á sacar la raiz cúbica de un quebrado (162 y sig.).

Tambien se podria reducir el quebrado propuesto á decimales, esté con enteros, ó sin ellos: pero es menester continuar esta reduccion hasta tres veces mas decimales de las que se quisieren poner en la raiz. Así si se pidiese la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$ aproximada hasta menos de una milésima, se mudaría el quebrado $\frac{3}{11}$ en 0, 272727272: de suerte que para sacar la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$, se sacaría la de 7, 272727272 que se hallaría ser 1, 937.

165 Para sacar la raiz cúbica de un número que tubiere decimales, se le deberá añadir un número suficiente de ceros, de modo que el número de sus decimales sea ó tres, ó seis, ó nueve &c. Se sacará entónces su raiz como si no hubiese coma, y concluida la operacion, se separará con una coma en la raiz, ácia la derecha, un número de guarismos que sea el tercio del número de las decimales de la cantidad propuesta: de suerte que si la raiz no tubiera bastantes guarismos para practicar esta regla, se remediaría con poner ceros en dicha raiz, ácia la izquierda.

Digitized by Google

da. Así para sacar la raiz cúbica de 6, 5 4, con diferencia de menos de una milésima, le añadiré siete ceros, y sacaré la raiz cúbica de 6 5 4 0 0 0 0 0 0 0, que será 1 8 7 0: separaré tres guarismos, porque hay nueve decimales en el cubo, y será 1, 870, ó simplemente 1, 8 7 la raiz cúbica de 6, 5 4. Por el mismo método hallaría que la de 0, 0 0 0 6, aproximada con diferencia de menos de una centésima, es 0, 08.

De las Razones, Proporciones y Progresiones, y de algunas reglas que en ellas se fundan.

166 La voz *Razon* significa en las Matemáticas lo que resulta de la comparacion de dos cantidades.

167 Si en la comparacion de dos cantidades se indaga en quánto la una excede á la otra ó esta á aquella, el resultado de esta comparacion, que es la diferencia de dichas dos cantidades, se llama su *Razon Arismética.*

Así si comparo 1 5 con 8 para conocer su diferencia 7, este número 7 que resulta de la comparacion, es la razon arismética de 1 5 á 8.

Para señalar que se comparan dos cantidades con la mira de indagar su diferencia, se pone un punto entre las dos: de suerte que 1 5 . 8 señala que se considera la razon arismética de 1 4 á 8.

168 Si en la comparacion de dos cantidades se lleva el fin de conocer las veces que la una cabe en la otra ó esta en aquella, el resultado de esta comparacion se llama *Razon*

Digitized by Google

Geométrica. Por egemplo, si comparo 12 con 3 para saber quántas veces 3 cabe en 12, el número 4 que espresa este número de veces, es la razon geométrica de 12 á 3.

Para señalar que se comparan dos cantidades con esta mira, se ponen dos puntos entre las dos: esta espresion 12 : 3 señala que se considera la razon geométrica de 12 á 3.

169 De las dos cantidades que se comparan, la que se pronuncia ó escribe la primera se llama *antecedente*, y la segunda se llama *consecuente.* Así en la razon 12 : 3, 12 es el antecedente, y 3 es el consecuente: las dos cantidades juntas se llaman *los términos de la razon.*

170 Para hallar la razon arismética de dos cantidades, no hay, pues, otra cosa que hacer sino restar la menor de la mayor.

171 Y para hallar la razon geométrica de dos cantidades, es menester dividir la una por la otra.

172 Valuarémos siempre esta razon dividiendo el antecedente por el consecuente: así la razon de 12 á 3 es 4, y la razon de 3 á 12 es $\frac{3}{12}$ ó $\frac{1}{4}$.

173 Una razon arismética no se altera, quando á cada uno de sus dos términos se le añade ó quita una misma cantidad; porque la diferencia (en que consiste la razon) queda siempre la misma.

174 Una razon geométrica no se altera quando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número: por-

porque como la razon geométrica consiste (172) en el cociente de la division del antecedente por el consecuente, es una cantidad fraccionaria, cuyo valor no muda (70) la multiplicacion, ó la division de sus dos términos por un mismo número. Así la razon 3 : 12 es la misma que la de 6 : 24 que se saca multiplicando los dos términos de la primera por 2: es tambien la misma que la de 1 : 4 que se saca dividiéndolos por 3.

175 Sirve esta propiedad para simplificar las razones. Por egemplo, si tubiera que averiguar la razon de $6\frac{3}{4}$ á $10\frac{2}{3}$ diría, reduciendo todo á quebrado, que dicha razon es la misma que la de $\frac{27}{4}$ á $\frac{32}{3}$, ó reduciendo al mismo denominador, la misma que la de $\frac{81}{12}$ á $\frac{128}{12}$, ó finalmente, suprimiendo el denominador 12 (que es lo mismo que si se multiplicasen por 12 los dos términos $\frac{81}{12}$, $\frac{128}{12}$ de la razon), es la misma que la de 81 : 128, porque tambien es cierto que 81 dozavos son á 128 dozavos, como 81 unidades á 128 unidades.

176 Quando quatro cantidades son tales que la razon de las dos primeras es la misma que la de las dos últimas, se dice que las quatro cantidades forman una *proporcion*, y esta proporcion es *arismética* ó *geométrica*, segun fuere arismética, ó geométrica la razon que en ellas se considera.

Las quatro cantidades 7, 9, 12, 14 forman una proporcion arismética, porque la diferencia de las dos primeras es la misma que la de las dos últimas. Para señalar

que

Digitized by Google

que están en proporcion arismética se escriben así, 7.9: 12. 14, quiero decir que se separan con un punto los dos términos de cada razon, y las dos razones con dos puntos. El punto que separa los dos términos de cada razon, significa *es á*, y los dos puntos que separan las dos razones, significan *como*: de suerte que para pronunciar la proporcion escrita conforme hemos dicho, se dice 7 es.á 9 como 12 es á 14.

Las quatro cantidades 3, 15, 4, 20, forman una proporcion geométrica; porque 3 es contenido en 15, las mismas veces que 4 lo es en 20. Para señalar que están en proporcion geométrica se escriben así, 3 : 15 : : 4 : 20: esto es, se separan los dos términos de cada razon con dos puntos, y las dos razones con quatro puntos. Los dos puntos significan *es á*, y los quatro puntos significan *como*: de suerte que se dice 3 es á 15 como 4 es á 20.

Solo se debe prevenir que, en la proporcion arismética, antes de la palabra *como*, se añade la palabra *arisméticamente*.

177 El primero y el último término de la proporcion se llaman los *estremos*: el segundo y el tercero se llaman los *medios*.

Como hay dos razones, y por consiguiente dos antecedentes y dos consecuentes, se dice, en la primera razon, *primer antecedente*, *primer consecuente*; y en la segunda, *segundo antecedente*, *segundo consecuente*.

178 Quando los dos términos medios de una proporcion son iguales, la proporcion se llama proporcion *conti-*

ti-

Digitized by Google

tinua. 3.7 : 7.11 forman una proporcion arismética continua: se escribe de este modo ∸ 3.7.11 : los dos puntos y la raya que están antes, sirven para avisar que, al pronunciar la proporcion, se debe repetir el término medio que es, en este egemplo, 7.

La proporcion 5 : 20 :: 20 : 80 es una proporcion geométrica continua, que para abreviar se escribe de este modo ∺ 5 : 20 : 80 : los quatro puntos, y la raya sirven para lo mismo que en la proporcion arismética continua.

179 Se infiere de lo que acabamos de decir sobre las proporciones arisméticas y geométricas 1.° Que si en una proporcion arismética se le añade ó quita á cada uno de los antecedentes la diferencia ó razon que reyna en dicha proporcion, segun que el antecedente fuere mayor ó menor que su consecuente, cada antecedente será igual á su consecuente: porque esto es dar al término menor de cada razon lo que le falta para que sea igual á su vecino, ó restar del mayor el exceso que lleva á su vecino: así en la proporcion 3.7 : 8.12, añádase la diferencia 4 al primero y tercer término, saldrá 7.7 : 12.12; se echa de ver que esto es general. 2.° Si en una proporcion geométrica se multiplican ambos consecuentes por la razon, cada uno será tambien igual á su antecedente: porque multiplicar el consecuente por la razon, es tomarle tantas veces quantas cabe en el antecedente: así en la proporcion 12 : 3 :: 20 : 5, si se multiplican 3 y 5 cada uno por 4, saldrá 12 : 12 :: 20 : 20 : igualmente en la propor-

cion

Digitized by Google

cion 15 : 9 :: 45 : 27, multiplicando 9 y 27 cada uno por $\frac{15}{9}$ ó $\frac{5}{3}$ que es la razon, saldrá 15 : 15 :: 45 : 45.

Propiedades de las Proporciones arisméticas.

180 La propiedad fundamental de las proporciones arisméticas es que la suma de los estremos es igual á la suma de los medios: por egemplo, en esta proporcion 3. 7 : 8. 12, la suma de 3 y 12 que son los estremos, y la de 7 y 8 que son los medios, es igualmente 15.

Vamos á probar, que esta propiedad es general.

Si los dos primeros términos fuesen iguales entre sí, y tambien fuesen iguales entre sí los dos últimos, como en esta proporcion 7. 7 : 12. 12, es evidente que la suma de los estremos sería igual á la de los medios.

Pero toda proporcion arismética puede reducirse á esta forma (179), añadiendo á cada antecedente ó quitándole la diferencia que reyna en la proporcion. Esta adicion que aumentará igualmente la suma de los estremos y la de los medios, no muda la igualdad de dichas dos sumas: así si son iguales despues de esta adicion, es porque lo eran yá antes de executarla.

Sirve el mismo razonamiento para el caso de la sustraccion.

181 Ya que en la proporcion continua los dos términos medios son iguales, se infiere de lo que acabamos de demostrar, que en esta misma porporcion la suma de los estremos es dupla del término medio, ó que el término medio

dío es la mitad de la suma de los estremos: así para hallar un medio arismético entre 7 y 15, por egemplo, sumo 7 con 15, y tomando la mitad de la suma 22, hallo 11 por término medio, de suerte que ÷ 7 . 11 . 15.

Propiedades de las Proporciones geométricas.

182 La propiedad fundamental de la proporcion geométrica es que el producto de los estremos es igual al producto de los medios: por egemplo, en esta proporcion 3 : 15 :: 7 : 35, el producto de 35 por 3, y el de 15 por 7 son igualmente 108.

Vamos á demostrar que esta propiedad conviene á toda proporcion geométrica.

Si los antecedentes fuesen iguales á sus consecuentes, como en esta proporcion

3 : 3 :: 7 : 7

es evidente que el producto de los estremos sería igual al producto de los medios.

Pero se le puede dar siempre esta forma á una proporcion (179) multiplicando los dos consecuentes por la razon. A la verdad resultará de esta multiplicacion que el producto de los estremos será un cierto número de veces mayor de lo que hubiera sido, ó un cierto número de veces menor, si la razon fuere un quebrado: pero ocasionará la misma alteracion en el producto de los medios: luego, ya que despues de dicha multiplicacion el producto de los estremos sería igual al producto de los medios, estos dos

dos productos deben tambien ser iguales antes de dicha multiplicacion.

Se puede, pues, tomar el producto de los estremos por el de los medios, y recíprocamente.

Luego en la proporcion continua el producto de los estremos es igual al quadrado del término medio, porque siendo iguales los dos medios, su producto es el quadrado del uno de los dos. Luego para hallar un medio geométrico entre dos números propuestos, se deben multiplicar uno por otro dichos dos números, y sacar la raiz quadrada del producto. Así para hallar un medio geométrico entre 4 y 9, multiplico 4 por 9, y la raiz quadrada 6 del producto 36 será el medio proporcional que se busca.

183 De la propiedad fundamental de la proporcion geométrica se infiere, que si conocemos los tres primeros términos de una proporcion, y queremos determinar el quarto, se debe multiplicar el segundo por el tercero, y dividir el producto por el primero: porque es evidente (56) que dividiendo el producto de los dos estremos por el primer término, ha de salir el quarto término: pero este producto de los estremos es el mismo que el de los medios: luego saldrá tambien el quarto término, dividiendo el producto de los medios por el primer término.

Así si se pregunta quál sería el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros fuesen 3 : 8 :: 12, multiplicaría 8 por 12, saldría 96 que dividiría por 3, y el cociente 32 sería el quarto término que se pide: de

suer-

Digitized by Google

suerte que 3, 8, 12, 32 forman una proporcion: con efecto la primera razon es $\frac{3}{8}$, y la segunda es $\frac{12}{32}$ que, (71) dividiendo los dos términos por 4, es tambien $\frac{3}{8}$.

Discurriendo del mismo modo se hallará qualquiera término de una proporcion, con tal que se conozcan tres. Si el término que se busca es uno de los estremos, se deberán multiplicar los dos medios, y dividir su producto por el otro estremo conocido. Si, al contrario, se busca uno de los medios, se deberán multiplicar los dos estremos, y dividir el producto por el medio conocido.

184 Esta propiedad de ser igual el producto de los estremos al de los medios no puede convenir sino á quatro cantidades en proporcion geométrica. Con efecto si hubiera quatro cantidades que no estubiesen en proporcion geométrica, multiplicando los consecuentes por la razon de las dos primeras, solo el primer antecedente vendria á ser igual con su consecuente: por egemplo, si tubiésemos 3, 12, 5, 10, multiplicando los consecuentes 12 y 10 por la razon $\frac{1}{4}$ de los dos primeros términos 3 y 12, saldría 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$, en los quales es evidente que el producto de los estremos no puede ser igual al de los medios: luego estos productos tampoco podrian ser iguales, aun quando no se multiplicasen los consecuentes por la razon $\frac{1}{4}$. Se echa de ver que esta demostracion se puede aplicar á todos los casos.

Luego si quatro cantidades son tales que el producto de los estremos sea igual al producto de los medios, dichas

qua-

Digitized by Google

quatro cantidades están en proporcion. De aquí inferirémos esta segunda propiedad de las proporciones.

185 Si quatro cantidades forman una proporcion, la formarán igualmente, poniendo los estremos en lugar de los medios, y los medios en lugar de los estremos.

186 Lo mismo se verificará, quiero decir, que subsistirá la proporcion si se muda el lugar de los estremos ó el de los medios.

Con efecto, en todos estos casos se podrá verificar que el producto de los estremos será siempre igual al de los medios.

Así la proporcion 3 : 8 :: 12 : 32 puede dar todas las proporciones siguientes solo con mudar el lugar de sus términos.

3 : 8 :: 12 : 32
3 : 12 :: 8 : 32
32 : 12 :: 8 : 3
32 : 8 :: 12 : 3
8 : 3 :: 32 : 12
8 : 32 :: 3 : 12
12 : 3 :: 32 : 8
12 : 32 :: 3 : 8

Lo mismo digo de otra qualquiera proporcion.

187 Ya que se puede poner el tercer término en lugar del segundo, y recíprocamente, se puede inferir que se puede, sin turbar una proporcion, multiplicar ó dividir los dos antecedentes por un mismo número, y que lo mis-

Digitized by Google

mismo se verifica para con los consecuentes: porque haciendo esta permutacion, los dos antecedentes de la proporcion dada formarán la primera razon, y los dos consecuentes la segunda. Así multiplicar los dos antecedentes de la primera proporcion viene á ser lo mismo, en este caso, que multiplicar ambos términos de una razon, por un mismo número, lo que (174) no muda dicha razon. Por egemplo, si tengo la proporcion 3 : 7 :: 12 : 28, puedo, dividiendo los dos antecedentes por 3, decir 1 : 7 :: 4 : 28; porque de la proporcion 3 : 7 :: 12 : 28 se puede (186) sacar 3 : 12 :: 7 : 28: y, dividiendo los dos términos de la primera razon por 3, sale 1 : 4 :: 7 : 28 que (186) puede ser mudada en 1 : 7 :: 4 : 28.

188 Subsiste una proporcion quando se compara, en cada razon, con el antecedente ó el consecuente la suma del antecedente y del consecuente, ó su diferencia.

Por egemplo, si fuese la proporcion

12 : 3 :: 32 : 8

se podrán inferir las proporciones siguientes

	12	mas	3	:	3	::	32	mas	8	:	8
ó.....	12	menos	3	:	3	::	32	menos	8	:	8
ó.....	12	mas	3	:	12	::	32	mas	8	:	32
ó.....	12	menos	3	:	12	::	32	menos	8	:	32

Porque si se hace la comparacion con el consecuente, se echa de ver que el antecedente aumentado ó disminuido del consecuente contendrá este consecuente una vez mas, ó una vez menos que antes: y como esta comparacion se hace del mismo modo en la segunda razon que, por la naturaleza de la proporcion, es igual á la primera, se sigue necesariamente que las dos nuevas razones serán tambien iguales entre sí.

Si se hace la comparacíon con el antecedente, se probará la proposicion del mismo modo, concibiendo que en la proporcion en la qual se hace esta mudanza, se haya puesto el antecedente de cada razon en lugar de su consecuente, y el consecuente en lugar del antecedente. Hemos visto (185) que esto se puede hacer.

189 Ya que poniendo el tercer término de una proporcion en lugar del segundo, y recíprocamente, hay todavia proporcion (186), se debe inferir que los dos antecedentes se contienen el uno al otro tantas veces, quantas los consecuentes se contienen el uno al otro.

Luego la suma de los dos antecedentes de qualquier proporcion contiene la suma de los dos consecuentes ó es contenida en ella tanto como uno de los antecedentes contiene su consecuente ó es contenido en él.

Por egemplo en la proporcion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

12 mas 32 : 3 mas 8 :: 32 : 8: esto es evidente; pero, para probarlo generalmente, basta considerar que si el primer antecedente contiene el segundo quatro veces, por egemplo, la suma de los dos antecedentes contendrá el segun-

Digitized by Google

gundo cinco veces : y por la misma razon, la suma de los consecuentes contendrá el segundo consecuente cinco veces: luego la suma de los antecedentes contendrá la de los consecuentes como el quíntuplo del uno de los antecedentes contiene el quíntuplo de su consecuente : esto es (174), como uno de los antecedentes contiene su consecuente.

Se probaría del mismo modo que la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

190 Es evidente que la proporcion que acabamos de demostrar viene á ser la misma que esta. Si hay dos razones iguales, por egemplo,

la de	4	:	12
y la de	7	:	21
	11	:	33

saldrá aún la misma razon, juntando el antecedente con el antecedente, y el consecuente con el consecuente.

Luego si hay muchas razones iguales, la suma de todos los antecedentes es á la suma de todos los consecuentes, como el uno de los antecedentes es á su consecuente. Por egemplo, si tenemos las razones iguales $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$, se puede decir que $4 + 7 + 2$ son á $12 + 21 + 6$, como 4 es á 12, ó como 7 es á 21, &c.

Porque juntando unos con otros los antecedentes de las dos primeras razones, y tambien los consecuentes unos con otros, la nueva razon que, segun acabamos de probar,

Digitized by Google

será la misma que cada una de las dos primeras, será tambien la misma que la tercera: por consiguiente, se podrá tambien juntar con esta, y resultará aún la misma razon, y así prosiguiendo.

191 De lo dicho (190) podemos inferir, que en toda proporcion la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes.

Ya que en la proporcion $48 : 16 :: 12 : 4$, por egemplo, tenemos (190)

$$48+12 : 16+4 :: 12 : 4$$
$$\text{y } 48-12 : 16-4 :: 12 : 4$$

es evidente, por ser comun la razon de $12 : 4$, que podemos inferir $48+12 : 16+4 :: 48-12 : 16-4$. Puede aplicarse esta prueba á otra porporcion qualquiera.

192 Luego si en la última proporcion substituimos el tercer término en lugar del segundo, y el segundo en lugar del tercero (186), probarémos facilmente que la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.

193 Si en la proporcion $48 : 16 :: 12 : 4$ trocamos el lugar de los medios, y escribimos $48 : 12 :: 16 : 4$, y aplicamos á esta proporcion el razonamiento que hicimos poco há (191), tendrémos $48+16 : 12+4 :: 48-16 : 12-4$, que comparada con la proporcion $48 : 16 :: 12 : 4$, manifiesta que la suma de los dos primeros términos de una proporcion, es á la suma de los

los dos últimos términos, como la diferencia de los dos primeros es á la diferencia de los dos últimos, ó con substituir el tercer término en lugar del segundo, y el segundo en lugar del tercero, la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á su diferencia.

194 Llámase *razon compuesta* la que resulta de dos ó mas razones, multiplicando los antecedentes por los antecedentes, y los consecuentes por los consecuentes. Por egemplo, si tenemos las dos razones 12 : 4 y 25 : 5, el producto de los antecedentes 12 y 25 será 300, el de los consecuentess 4 y 5 será 20 : la razon de 300 á 20 es la que llamamos razon compuesia de la de 12 á 4 y de 25 á 5.

195 Esta razon es la misma que resultaría valuando separadamente cada una de las razones componentes, y multiplicando despues, unos por otros, los números que espresan dichas razones. Con efecto, la razon de 12 á 4 es 3, y la de 25 á 5 es 5; pero 3 veces 5 son 15 que es la razon de 300 á 20; y se hallará que esto es general, considerando que la medida de la razon (172) es un quebrado que tiene el antecedente por numerador, y el consecuente por denominador. Así la razon compuesta debe ser un quebrado, cuyo numerador sea el producto de los dos antecedentes, y el denominador el producto de los dos consecuentes : es, pues, la razon compuesta (88) el producto de dos quebrados que espresan las razones componentes.

196 Si las razones que se multiplican son iguales, la razon compuesta se llama razon *duplicada*, si no son mas de dos las razones multiplicadas: si son tres las multiplicadas, la razon compuesta que resulta se llama *triplicada*: si son quatro, se llama *quadruplicada*, y así prosiguiendo.

Por egemplo, si multiplicamos la razon de 2 á 3 por la de 4 á 6, que le es igual, saldrá la razon compuesta 8 : 18, que llamarémos razon duplicada de la razon de 2 á 3, ó de 4 á 6.

197 Si hay dos proporciones, y se multiplican por órden: esto es, el primer término de la una por el primer término de la otra, el segundo por el segundo, y así prosiguiendo; los quatro productos que resultaren estarán en proporcion.

Porque multiplicando de este modo dos proporciones, es multiplicar dos razones iguales por dos razones iguales (176): luego las dos razones compuestas que resultan deben ser iguales: luego los quatro productos deben estar en proporcion (176).

198 Inferamos de aquí que los quadrados, los cubos, y en general las potencias semejantes de quatro cantidades en proporcion, están tambien en proporcion: porque para formar estas potencias, no hay sino multiplicar muchas veces de seguida la proporcion por ella misma.

199 Las raices quadradas, cúbicas y en general las raices semejantes de quatro cantidades en proporcion, están

Digitized by Google

tán tambien en proporcion: porque la razon de las raices quadradas de los dos primeros términos no es mas que la raiz quadrada de la razon de dichos dos términos (147 y 171): lo mismo digo de la razon de las raices quadradas de los dos últimos términos: luego, ya que suponemos iguales las dos razones primitivas, sus raices quadradas son iguales: luego la razon de las raices quadradas de los dos primeros términos será igual á la razon de las raices quadradas de los dos últimos. Del mismo modo se probará la proposicion respecto de las raices cúbica, quarta, &c.

200 Si se compusiere una razon del producto de otras muchas razones, se podrá substituir en lugar de una de las razones componentes una razon expresada por otros términos, con tal que estos términos tengan el uno con el otro la misma razon que hay entre aquellos en cuyo lugar se les substituyere.

Por egemplo, en la razon de $6 \times 10 : 2 \times 5$, podrémos substituir 3 y 1, en lugar de los factores 6 y 2, de donde resultará la razon compuesta $3 \times 10 : 1 \times 5$. Con efecto, ya que $6 : 2 :: 3 : 1$, podremos, sin que por esto se mude la proporcion (187), multiplicar los antecedentes por 10, y los consecuentes por 5: de lo que resultará $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$. Es evidente que se puede probar del mismo modo la proposicion respecto de otra porporcion qualquiera.

201 Si dos ó mas proporciones son tales que en la

Digitized by Google

primera razon de la una el antecedente sea igual al consecuente de la otra, se podrá, quando se hubieren de multiplicar por órden dichas proporciones, omitir los términos que fueren comunes al antecedente y al consecuente. Por egemplo si tubiésemos las dos proporciones

$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ \hline \end{array}$$

Podremos inferir $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$

Porque aunque admitiéramos el multiplicador comun 4, la razon de 6×4 á 4×3, que resultaría, no se distinguiría de la razon de 6 á 3 (174), que queda, con omitir dicho factor comun.

Asimismo si tuviéramos
$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ 3 : 7 :: 21 : 49 \\ \hline \end{array}$$

Inferiríamos $6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49$.

Algunos usos de las proposiciones precedentes.

202 Aunque las proposiciones que acabamos de demostrar son de un uso continuo en todos los ramos de la Matemática, sirven particularmente para la resolucion de varias cuestiones pertenecientes á la Arismética. Podríamos, pues, detenernos en manifestar aquí su aplicacion para egecutar algunas operaciones que acerca de los números suelen ofrecerse. Pero como darémos para este fin en el tratado de

Digitized by Google

de Algebra métodos muchísimo mas breves que los que aquí podríamos declarar, nos ceñirémos á hacer patente el uso de lo que quedó sentado (183), y que es el fundamento de quanto trahen los Escritores de Arismética acerca de los usos para que puede servir la doctrina de las proporciones.

De la Regla de Tres Directa y Simple.

203 Hay muchas especies de reglas de tres: todas se dirigen á hallar un término de una proporcion, de la qual tres son conocidos.

La regla de tres *directa* y *simple* se llama *simple* porque es tal la naturaleza de las cuestiones á las quales se aplica, que nunca contiene mas de quatro cantidades, de las quales tres son conocidas, y se ha de buscar la quarta.

Llámase *directa*, porque de las quatro cantidades que en ella se consideran, hay siempre dos que no solo tienen relacion con las otras dos, sino que dependen de ellas de tal manera que así como una de las cantidades contiene la otra ó es contenida en ella, del mismo modo la cantidad relativa á la primera contiene la cantidad relativa á la segunda, ó es contenida en ella: esto es, con menos palabras, que una cantidad y su relativa pueden ser siempre ambas ó antecedentes ó consecuentes de la proporcion: lo que no sucede en la regla de tres inversa, conforme lo manifestarémos dentro de poco.

Hemos declarado bastante (183) el método para ha-

Digitized by Google

hallar el quarto término de una proporcion, y por consiguiente para practicar la regla de tres directa y simple: pero conviene manifestar con algunos egemplos el uso que se puede hacer de esta regla.

EGEMPLO I.

40 hombres han hecho, en cierto tiempo, 268 varas de obra: se pregunta quánta obra harán 60 hombres en el mismo tiempo.

En este egemplo, 40 hombres y las 268 varas de obra que hacen, son las dos cantidades relativas, y las otras dos son los 60 hombres, y las varas de obra que han de hacer. Aquí conviene reparar que las 268 varas no solo han de tener relacion con las que buscamos, sino que esta relacion pende de la que hay entre los 40 h. y los 60 h. De modo que así como 40 hombres son menos que 60, las 268 varas de obra que hacen los primeros, han de ser menos que las que los otros hiciesen en el mismo tiempo: quiero decir, que el número de varas de obra que harán los 60 hombres ha de ser mayor que 268 en la misma razon que 60 es mayor que 40. Se debe, pues, buscar el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son los siguientes,

$$40 : 60 :: 268$$

ó (dividiendo, como se puede (283), los dos primeros por 20)

$$2 : 3 :: 268$$

Así

Así segun se dijo (183), multiplico 268 varas por 3, y divido el producto 804 por 2, sale el cociente 402 varas: y por consiguiente son 402 las varas de obra que harian los 60 h.

EGEMPLO II.

Un equipage de Artillería ha caminado 34 leguas en 6 dias: se pregunta quántos dias necesitaría para caminar 255 leguas, en las mismas circunstancias.

Es evidente que necesitará mas tiempo, á proporcion del mayor número de leguas, y que por consiguiente el número de dias que se busca, debe contener 6 dias tantas veces como 255 leguas contienen 34 leguas. Se debe, pues, buscar el quarto término de una proporcion, que empezaría por estos tres

34 : 255 :: 6:

multiplicando 255 por 6, y dividiendo el producto por 34, resultarán 45 dias.

EGEMPLO III.

52 V. 2 P. 5 p. de obra se han pagado con 30 Pe. 9 rs. 4 ms: se pregunta quánto se ha de pagar por 77 V. 1 P. 8. p.?

El precio de 77 V. 1 P. 8 p. debe contener el precio 30 Pe. 9 rs. 4 ms. de las 52 V. 2 P. 5 p. como 77 V. 1 P. 8 p. contienen 52 V. 2 P. 5 p. Se debe, pues, buscar el quarto término de una proporcion que empezase por estos tres:

52 V. 2 P. 5 p: 77 V. 1 P. 8 p:: 30 Pe. 9 rs. 4 ms.

quie-

Digitized by Google

quiero decír que se deben multiplicar 30 Pe. 9 rs. 4 ms. por 77 V. 1 P. 8 p. y dividir el producto, conforme se enseñó (102 y 105), por 52 V. 2 P. 5 p; y saldrán 44 Pe. 14 rs. 10 ms. que serán los que se habrán de pagar por las 77 V. 1 P. 8 p.

Si hubiese quebrados, despues de reducidos los dos términos de una misma especie á su menor unidad, como en este egemplo, se simplificaría la razon de dichos dos términos del modo que se enseñó (175).

Si se atiende á la disposicion de las cantidades con que hemos executado la regla de tres directa, se verá que en esta operacion las dos cantidades relativas son antecedentes ó consecuentes de la proporcion.

En el egemplo primero 40 y 268 que eran dos cantidades relativas, fueron ambos antecedentes.

En el segundo fueron antecedentes 34 leguas y 6 número de los dias en que se anduvieron, que era por consiguiente la cantidad relativa á dichas 34 leguas.

En el tercer egemplo las 52 V. 2 P. 5 p. y los 30 Pe. 9 rs. 4 ms, en que se han pagado son las dos cantidades relativas, y forman los antecedentes de la proporcion.

De la Regla de Tres Inversa y Simple.

204 La regla de tres inversa y simple se diferencia de la regla de tres directa, de que acabamos de hablar, en que de las quatro cantidades que entran en la cuestion que dá motivo á esta operacion, las dos principales deben conte-

tenerse la una á la otra en un órden todo opuesto al de las otras dos cantidades que les son relativas : de suerte que quando, despues de considerada la cuestion, se ha dado á estas cantidades la disposicion correspondiente para formar una proporcion, la una de las cantidades principales y su relativa forman los estremos, y la otra cantidad principal con su relativa forman los medios.

Por lo demas, esto no introduce diferencia alguna en el modo de hacer la operacion : su objeto es siempre buscar el quarto término de una proporcion, ó por lo menos, siempre se puede reducir la operacion á estos términos.

Algunos Arisméticos han dado para el caso actual una regla dependiente del modo con que está propuesta la cuestion. Nos guardarémos de imitar su egemplo, porque para la resolucion de los casos pertenecientes á la regla de tres inversa, solo debe guiarnos la misma naturaleza de la cuestion, y no el modo con que viene propuesta, que las mas veces es defectuoso.

EGEMPLO I.

30 hombres han hecho una obra en 25 dias: ¿quántos hombres serán menester para hacer la misma obra en 10 dias?

Se echa de ver que se necesitan en este segundo caso tantos mas hombres, quanto es menor el número de los dias: así el número de hombres que se busca debe contener el número de 30 hombres, como el número de 25 dias, relativo á estos, contiene el número de 10 dias, relativo á aquellos. Todo se reduce, pues, á hallar el quarto to término de una proporcion, cuyos tres primeros son los siguientes:

10 d: 25 d:: 30 h

esto es, á multiplicar 30 por 25 y dividir el producto 750 por 10: y sale 75 ó 75 h.

En este egemplo se debe considerar que de las tres cantidades dadas, las dos relativas son 25 d. y 30 hombres: y 10, que es la tercera de las cantidades dadas, es relativa al número de hombres que buscamos. Como este número de hombres ha de ser mayor que 30, como 10 d. es menor que 25 d. por esto la regla de tres es inversa, y queda transformada en una regla de tres directa, haciendo que las dos cantidades relativas 25 d. y 30 h. sean los medios de la proporcion cuyo quarto término buscamos.

EGEMPLO II.

Un navio no tiene bastimentos sino para 15 dias, y ha de navegar 20 dias: ¿se pregunta á qué se debe reducir la totalidad de las raciones cada dia?

Representemos por la unidad la totalidad de los víveres que se consumen cada dia. Es manifiesto que la porcion á que es preciso ceñirse en el caso propuesto, ha de ser menor que dicha unidad en la misma razon que el número 20 de los dias, que debe durar esta economía, es mayor que el número de 15 dias: que por consiguiente, del mismo modo que 20 dias contienen 15 dias, la totalidad de los víveres que se hubieran consumido cada uno de estos

tos 15 dias, debe contener la de los víveres que se gastáran cada uno de los 20 dias: se debe, pues, buscar el quarto término de una proporcion que empezaría por estos tres

$$20\ d : 15\ d :: 1.$$

Este quarto término será $\frac{15}{20}$ ó $\frac{3}{4}$. Es, pues, preciso ceñirse á los tres quartos de lo que se hubiera gastado cada dia.

EGEMPLO III.

Un comboy, caminando 5 horas al dia, puede andar cierto espacio en 18 dias: pero convendría que llegase en 12 dias, sin hacer cuenta de las paradas: se pregunta quántas horas deberá caminar cada dia?

Es evidente que deberá caminar cada dia un número de horas tanto mayor que 5 horas, quanto el número 12 de los dias que debe gastar es menor que el número 18 de los dias que gastaría, si no caminase á marchas forzadas. Así manifiesta el estado de la cuestion que hemos de calcular el quarto término de una proporcion que empezaría por los tres siguientes:

$$12 : 18 :: 5 :$$

Multiplicando, pues, 18 por 5, y dividiendo el producto por 12, saldrán $7\frac{1}{2}$ horas, que son las que deberá caminar el comboy cada dia.

De la Regla de Tres Compuesta.

205 En las dos reglas de tres que acabamos de espli-

plicar, la cantidad buscada y la cantidad de misma especie, espresada en la cuestion, tienen entre sí una razon simple y determinada por la razon de las otras dos cantidades que espresa igualmente la cuestion.

En la regla de tres compuesta, la razon de la cantidad buscada á la cantidad de su misma especie que se menciona en la pregunta, no está determinada por la razon simple de otras dos cantidades solamente, sino por muchas razones simples que es menester componer (294) en virtud de los términos de la cuestion.

Una vez compuestas las razones, se reduce la operacion á una regla de tres simple. Los egemplos siguientes lo aclararán.

EGEMPLO I.

30 hombres han hecho 132 varas de obra en 18 dias ¿quánta obra harán 54 hombres en 28 dias?

Se echa de ver que la obra pende, en este caso, no solo del número de los hombres, sino tambien del número de los dias.

Para atender al uno y al otro, se debe considerar que 30 hombres trabajando 18 dias, hacen la misma obra que 18 veces 30 hombres, ó 540 hombres en un dia: porque 30 hombres que trabajan 18 dias son 30 jornales tomados 18 veces, ó 540 jornales, que para el caso lo mismo es que se hagan todos en un dia ó en los 18 que espresa la pregunta.

Igualmente, 54 hombres trabajando 28 dias, hacen

la

Digitized by Google

la misma obra que 28 veces 54 hombres, ó 1512 hombres trabajando un dia.

La cuestion se muda, pues, en esta: 540 hombres han hecho 132 varas de obra, ¿quánta harán en el mismo tiempo 1512 hombres? Quiero decir que se debe buscar el quarto término de una proporcion que empezaría por estos tres

540 h: 1512 h:: 132 V.

multiplicando 1512 por 132, y dividiendo el producto por 540, se hallará por respuesta á la cuestion que 1512 hombres en un dia, ó 54 hombres en 28 dias, harian $369\frac{3}{5}$ V.

EGEMPLO II.

Un hombre que camina 7 horas cada dia ha gastado 30 dias para andar 230 leguas: si caminase 10 horas cada dia, ¿quántos dias gastaría para andar 600 leguas, caminando siempre con igual diligencia?

Si caminase el mismo número de horas cada dia en ambos casos, es evidente que gastaría tantos mas dias, quanto mas camino tiene que andar; pero como camina un mayor número de horas cada dia en el segundo caso, por lo mismo gastará menos tiempo. Así la operacion tiene parte de la regla de tres directa, y parte de la regla de tres inversa.

Se reducirá á una regla de tres simple, considerando que caminar por espacio de 30 dias, andando 7 horas cada dia, es lo mismo que caminar 30 veces 7 horas ó 210 horas.

K Así

Digitized by Google

Así se puede mudar la cuestion en estotra : Se han gastado 210 horas para andar 230 leguas : ¿quántas se necesitarán para andar 600 leguas ? Habiendo hallado el número de horas que satisface á esta pregunta , y dividiéndole por 10, saldrá el número de dias que se pide , pues el hombre de quien se trata , camina 10 horas cada dia.

Así se debe buscar el quarto término de la proporcion, cuyos tres primeros son

$$230\ \mathrm{l} : 600\ \mathrm{l} :: 210\ \mathrm{h} :$$

se hallará que este quarto término es $547\frac{19}{23}$ horas , que divididas por 10 , número de horas que este hombre camina cada dia , dan 54 dias y $\frac{180}{230}$ ó 54 d. $\frac{18}{23}$.

De la Regla de Compañia.

206 La regla de compañia se llama así porque sirve para partir entre muchos asociados el beneficio ó la pérdida que resulta de su compañia.

Su fin es partir un número propuesto en partes que tengan entre sí razones dadas.

La regla que para esto se dá , está fundada en lo que digimos (190) : la deducirémos de este principio en el egemplo siguiente.

EGEMPLO I.

Supongamos , por egemplo , que se trate de partir 120 en tres partes que tengan entre sí las mismas razones que los números 4 , 3 , 2 ; los términos de la cuestion dan estas dos proporciones:

Digitized by Google

4 : 3 :: la primera parte es á la segunda.

4 : 2 :: la primera parte es á la tercera.

ó (186) estotras dos:

4 es á la primera parte :: 3 es á la segunda.

4 es á la primera parte :: 2 es á la tercera.

De suerte que tenemos estas tres razones iguales: 4 es á la primera parte :: 3 es á la segunda :: 2 es á la tercera.

Pero hemos visto (190) que la suma de los antecedentes de muchas razones iguales es á la suma de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente. Podemos, pues, decir aquí que la suma 9 de las tres partes proporcionales á las que buscamos, es á la suma 120 de estas, como una qualquiera de las tres partes proporcionales es á la parte de 120 que la corresponde.

Se reduce, pues, la regla: 1.° á hacer una totalidad de las partes proporcionales dadas: 2.° á hacer tantas reglas de tres quantas son las partes que se buscan, y de las quales cada una tendrá por primer término la suma de las partes proporcionales dadas: por segundo término, el número propuesto para dividirle : y por tercer término la una de las partes proporcionales dadas. Así en la cuestion que hemos escogido por egemplo, habria que hacer estas tres reglas de tres:

9 : 120 :: 4:

9 : 120 :: 3:

9 : 120 :: 2:

Digitized by Google

de las quales se hallará (183) que los quartos términos son $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ que tienen entre sí las razones señaladas, y componen con efecto el número 120.

Pero es facil reparar que no es absolutamente indispensable hacer tantas reglas de tres quantas son las partes que se buscan. Se puede escusar la última restando del número propuesto la suma de las demas partes despues de haberlas hallado: quiero decir, que si se buscasen tres partes, por egemplo, despues de halladas las dos primeras, se restaría su suma del número propuesto, y la resta sería la tercera y última parte.

EGEMPLO II.

Tres asociados quieren partir la ganancia de su comercio. El primero puso 20000 rs, el segundo 60000, el tercero 120000: se pregunta ¿quánto le toca á cada uno de la ganancia que monta 800000 rs. rebajados todos los gastos?

Ya se vé que se trata de partir 800000 en partes que tengan entre sí las mismas razones que 20000, 60000, 120000, ó (174) que 2, 6, 12, pues á cada uno debe tocarle á proporcion del dinero que puso: se deben pues juntar las tres partes proporcionales 2, 6, 12; y hacer las tres proporciones siguientes, ó solas dos

20 : 800000 :: 2 : la primera parte,
20 : 800000 :: 6 : la segunda parte,
20 : 800000 :: 12 : la tercera parte.

Es-

Digitized by Google

Estas tres partes serán 80000, 240000, 480000.

Aun quando fuese la cuestion mas complicada, se reduciría igualmente á los mismos principios.

EGEMPLO III.

Tres personas han hecho una compañia: la primera ha puesto 3000 rs. que han estado *6* meses en el fondo comun: la segunda ha puesto 4000 rs. que han estado 5 meses: y la tercera ha puesto 8000 que han estado *9* meses: ¿quánto le toca á cada una de la ganancia que asciende á 12050 rs? Se reducirán todas las puestas á un mismo tiempo de este modo.

La puesta de 3000 rs. ha de producir durante *6* meses tanto como *6* veces 3000 rs. ó 18000 rs. en un mes.

La puesta de 4000 rs. producirá en 5 meses tanto como 5 veces 4000 rs. ó 20000 en un mes.

Finalmente la puesta de 8000 ha de producir en *9* meses tanto como *9* veces 8000, ó 72000 en un mes.

Así la cuestion se reduce á estotra: las puestas de los asociados son 18000, 20000, 72000: ¿quánto le toca á cada uno de la ganancia 12050?

Procediendo como en el egemplo arriba propuesto, se hallará que le tocan al primero $1971\frac{9}{11}$ rs: al segundo $2190\frac{10}{11}$ rs, y al tercero $7887\frac{3}{11}$.

EGEMPLO IV.

El parque de un egército consta de 15*6* piezas de artillería. Se ha de dividir dicho egército en tres divisiones, de modo que la fuerza de la primera division sea á la de la segunda :: 5 : 4; y que la de la primera sea á la de la tercera division :: 7 : 3. Se trata de repartir la artillería proporcionalmente á las fuerzas de cada division.

Como la fuerza de la primera division está representada por 5 en la primera razon, y por 7 en la segunda, es preciso empezar haciendo que la represente un mismo número, lo que se consigue con facilidad multiplicando los dos términos de la primera razon por 7, y los dos términos de la segunda por 5, cuya operacion no alterará las razones. Entónces las fuerzas de la primera, segunda y tercera division han de ser respectivamente como los números 35, 28 y 15. Se reduce, pues, la operacion á dividir 156 en tres partes proporcionales á los números 35, 28 y 15, lo que se egecuta como en el primer egemplo, y sale 70, 56 y 30.

De la Regla de Aligacion.

207 Consiste la regla de aligacion en hallar el precio medio de la mezcla de muchas cosas diferentes, con tal que se sepa el número y el precio de cada una: ó en averiguar en qué proporcion se han de mezclar dichas cosas, una vez que se conoce su precio, y el precio medio á que se han de vender.

CASO I. ¿A quánto se ha de vender el marco de una mezcla hecha con 6 marcos de plata de á 200 rs. cada uno,

Digitized by Google

uno, y con 12 marcos de á 144 rs. para no perder ni ganar?

Multiplíquese cada porcion de la mezcla por su precio respectivo, y divídase la suma de los productos por la suma de las cantidades que se quieren mezclar: el cociente será el precio medio.

$$6 \times 200 = 1200 \qquad \frac{2928}{18} = 162\tfrac{2}{3} \text{ precio medio.}$$
$$12 \times 144 = 1728$$
$$\overline{2928}$$

Fúndase este método en la proporcion siguiente: la suma de los marcos es á la de su precio, como un marco de la mezcla es al precio medio. De cuya proporcion sale que $18 : 2928 :: 1 : \frac{2928}{18} = 162\frac{2}{3}$.

Se comprueba este primer caso de la regla de aligacion, valuando toda la mezcla al precio medio: su valor ha de ser igual á la suma de los valores particulares.

CASO II. Aunque se conozca el precio medio, y el de cada parte de la mezcla, puede suceder, 1.° que no sea fija ninguna de las cantidades que han de entrar en la mezcla: 2.° que lo sea una de ellas: 3.° que esté ceñida la cuestion á una cantidad determinada de mezcla. Con los egemplos nos darémos mejor á entender.

1.° Un vinatero quiere mezclar vino de á 15 rs. la arroba con vino de á 8 rs. para hacer una mezcla que pueda vender á 12 rs. la arroba. ¿Qué porcion necesita de cada uno de los dos vinos para hacer la mezcla que desea?

Digitized by Google

Escribo los tres precios como se ve

$$12 : \begin{cases} 15 \;.\;.\;.\; 4 \\ 8 \;.\;.\; 3 \end{cases}$$

enfrente del 8 escribo la diferencia 3 que vá de 12 á 15, y enfrente de 15, la diferencia 4 que vá de 12 á 8, é infiero que 3 arrobas de vino de á 8 rs. mezcladas con 4 arrobas de vino de á 15, darán un vino de á 12 rs. la arroba. Esto es evidente por la compensacion de los dos precios, el uno mayor y el otro menor que el precio medio.

208 Pero no se debe inferir de esta compensacion, que sean 4 y 3 los únicos números que resuelvan la cuestion. La pregunta es de tal naturaleza que admite una infinidad de respuestas, aunque se pidan números enteros. Para hallarlas basta tomar dos números que tengan uno con otro la misma razon que 4 y 3, para cuyo fin basta duplicarlos, triplicarlos &c.

209 Si la mezcla se hubiera de hacer con vino de á 15, de á 10, y de á 8, para que saliera un vino de á 12, se practicaría lo propio con poca diferencia. Quiero decir que despues de haber comparado 15 y 8 con el precio medio 12, y escritas recíprocamente las diferencias 3 y 4, se compararía 15 y 10 con el precio medio 12, y se escribirían tambien recíprocamente sus diferencias 3 y 2. Véase el egemplo:

Digitized by Google

$$12 : \begin{cases} 15 \; .. \; 4 \; .. \; 2 = 6. \\ 10 \; .. \; 3 \\ 8 \; .. \; \underline{3} \\ \quad\quad 12 \end{cases}$$

Por consiguiente con 6 arrobas de vino de á 15 rs. 3 arrobas de á 10, y 3 arrobas de á 8, se harian 12 arrobas de á 12. La razon se percibe facilmente.

Si se hubiera de hacer la mezcla con quatro, cinco ú seis especies de vino de distinto precio, se compararían succesivamente dos á dos con el precio medio, poniendo cuidado en no comparar cada vez sino dos precios el uno mayor, y el otro menor que el precio medio.

2.° Un panadero ha determinado hacer en un año de escasez pan con cebada, centeno y trigo, y venderle á 7 quartos, ú 28 mrs. la libra. Tiene 8 celemines y medio de trigo con los quales haria pan de á nueve quartos la libra. El pan hecho con centeno solo le saldria á 4 quartos 2 mrs, y el que haria con cebada le vendria á salir á 2 quartos, y 1 mri. Se pregunta ¿qué porcion de centeno y de cebada ha de mezclar con los 8 celemines y medio de trigo para sacar un pan que le salga á 7 quartos la libra?

$$28 : \begin{cases} 36 \; .. \; 19 \; .. \; 10. \\ 18 \; .. \; 8 \\ 9 \; .. \; 8 \end{cases}$$

El precio medio es en este caso 28 mrs: saco la diferen-

cia

cia que hay entre este precio y los demas, como en el egemplo antecedente, y digo:

Para hacer pan de á 7 quartos la libra con los precios señalados, se podrian tomar 29 celemines de trigo, y mezclarlos con 8 celemines de centeno y 8 de cebada. Pero como es determinada la cantidad de trigo que tiene el panadero, es evidente que si con 29 celemines de trigo se necesitan 8 de centeno y 8 de cebada, para $8\frac{1}{2}$ celemines de trigo se necesitará una cantidad proporcional de los demas granos, que determinaré egecutando la siguiente regla de tres:

$29 : 8\frac{1}{2} :: 8 : \frac{(8\frac{1}{2})\times 8}{29} = \frac{68}{29} = 2\frac{10}{29}$ celemines de centeno, y otros tantos de cebada.

Lo propio se practicaría aun quando fuese mayor el número de las cosas que se hubiesen de mezclar una vez que se conoce su precio, y la cantidad de una de ellas.

3.° Hay café de tres precios: el uno cuesta 10 rs. la libra, el otro 7, y el otro 3 rs. Se pregunta ¿cómo se han de mezclar para que salga una porcion de 64 libras que se pueda vender á 8 rs?

Tómense las diferencias, como antes, y despues de sumadas, dígase: la suma de las diferencias es á la cantidad de la mezcla, como cada diferencia en particular es á la cantidad que de ella ha de entrar en la mezcla.

Digitized by Google

$$8\left\{\begin{array}{l}10\ \ldots\ 5\ \ldots\ 1\\ 7\ \ldots\ 2\\ 3\ \ldots\ 2\end{array}\right.$$

$10 : 64 :: 6 : \frac{64\times6}{10} = 38\frac{2}{5}$ lib. del de á 10 rs.

$10 : 64 :: 2 : \frac{64\times2}{10} = 12\frac{4}{5}$ lib. del de á 7 y del de á 3.

De la Regla de falsa posicion.

210 Sirve la regla de falsa posicion para hallar un número incógnito por medio de un número supuesto. Supongamos, por egemplo, que se nos pida un número tal que su mitad, su quarto y su quinto compongan 456.

Supondrémos que dicho número es 20: y aunque la mitad, el quarto y el quinto de 20 no componen mas que 19, no por esto dejará de ayudarnos para hallar el número que buscamos. Porque una vez que dos cantidades tienen la misma razon que sus partes semejantes, se puede considerar la una como la suma de los antecedentes de una serie de términos proporcionales, y la otra como la suma de los consecuentes. Pero dichas dos sumas son entre sí (190) como un número qualquiera de antecedentes es al mismo número de consecuentes, y recíprocamente: luego la mitad mas el quarto mas el quinto de 20, son á la mitad mas el quarto mas el quinto del número que buscamos, como el mismo número 20 es al número que se busca. Tenemos, pues,

$19 : 456 :: 20 : \frac{456\times20}{19} = 480.$

EGEM-

EGEMPLO II.

Tres negociantes han perdido 2400 Pe. en una empresa, cuya pérdida se debe repartir entre ellos en razon de las puestas de cada uno. Las puestas son tales que el primero puso tanto como los otros dos juntos, y el segundo puso el duplo de la puesta del tercero. Se pregunta ¿qué parte le toca á cada uno de la pérdida?

Si suponemos que el tercero puso 3 Pe. la puesta del segundo será *6* Pe. y la del primero *9*. En virtud de esto, dirémos: la suma 18 de las puestas es á la pérdida total 2400, como la puesta de cada uno es á la porcion que le toca de la pérdida: esto es:

$$18 : 2400, \text{ó } 3 : 400 :: \begin{cases} 3 : \dfrac{400 \times 3}{3} = 400. \\ 6 : \dfrac{400 \times}{3} = 800. \\ 9 : \dfrac{400 \times 9}{3} = 1200. \end{cases}$$

También hubiéramos sacado el mismo resultado con otra infinidad de números formados con las mismas condiciones que 18.

EGEMPLO III.

¿Quánto tiempo sería menester para llenar un estanque, abriendo á un tiempo quatro caños, el primero de los quales le llenaría en 2 horas, el segundo en 3, el tercero en 5, y el quarto en *6*?

Supongamos que sea menester una hora, y veamos si se llenaría el estanque. Es evidente que en este intervalo el

pri-

Digitized by Google

primer caño llenaría la mitad, el segundo la tercera parte &c. y que de este modo los quatro á un tiempo llenarian en una hora los $\frac{36}{30}$ ó los $\frac{6}{5}$ del estanque. No se necesita, pues, una hora. Para determinar á punto fijo el tiempo que es menester, dirémos:

$$\tfrac{6}{5} : \tfrac{5}{5} \text{ ó } 6 : 5 :: 1\,\text{H} : \tfrac{5}{6} = 50'.$$

De las Progresiones arisméticas.

211 La progresion arismética es una *serie* ó *continuacion* de términos, cada uno de los quales es mayor ó menor que el que le precede, de la misma cantidad. Por egemplo

$$\div\ 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 \,.\, 13 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, 22 \,.\, 25 \text{ \&c.}$$

es una progresion arismética, porque cada término es mayor que el que le precede, de una misma cantidad que aquí es 3.

Los dos puntos separados con una raya que se vén al principio de la progresion, sirven para avisar que al pronunciar esta progresion, se debe repetir cada término, excepto el primero y el último, en esta forma, 1 es á 4, como 4 es á 7, como 7 es á 10, &c.

La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun que los términos van aumentando ó disminuyendo: pero como las propiedades de la una y de la otra son las mismas, solo con mudar las voces mas en menos, sumar en restar, y multiplicar en partir, considerarémos aquí sola la progresion creciente.

Se

212 Se saca, pues, de la definicion de la progresion arismética, que con el primer término y la diferencia comun ó la razon de la progresion, se pueden formar todos los demas términos, añadiendo consecutivamente dicha razon, y que por consiguiente

El segundo término se compone del primero, mas la razon.

El tercero se compone del segundo, mas la razon: y por consiguiente del primero, mas dos veces la razon.

El quarto se compone del tercero, mas la razon: y por consiguiente del primero, mas tres veces la razon: y así prosiguiendo.

213 De suerte que se puede decir, en general, que un término qualquiera de una progresion arismética se compone del primero, mas de tantas veces la razon quantos términos hay antes de él.

214 Luego si el primer término fuere cero, qualquiera término de la progresion sería igual á tantas veces la razon, quantos términos hubiese antes de él.

215 Puede tener este principio los dos usos siguientes:

1.° Sirve para hallar un término qualquiera de una progresion, sin que sea preciso calcular los que le preceden. Supongamos que se pregunte, por egemplo, quál sería el 100.^{mo} término de esta progresion $\div$ 4 . 9 . 14 . 19 . 24 &c.

Ya que el término que se busca debe ser el 100mo, tendrá 99 términos antes de él: se compone por consiguiente te del primer término 4 y de 99 veces la razon 5 : será pues 4 mas 495, esto es, 499.

216 2.° Sirve tambien el mismo principio para unir dos números qualesquiera por una serie de otros tantos números como se quisiere, de manera que todos juntos formen una progresion arismética; cuya operacion se llama *interponer entre dos números dados muchos medios proporcionales arisméticos*, ó simplemente *muchos medios arisméticos*.

Por egemplo, podemos unir 1 y 7 por cinco números que hagan una progresion arismética con 1 y 7 : estos números son 2, 3, 4, 5, 6 : pero como no siempre es facil conocer á primera vista quáles deben ser estos números, vamos á declarar cómo se pueden hallar por medio del principio sentado.

No hay, pues, sino hallar la razon que debe reynar en esta progresion.

Pero debiendo ser el mayor de los dos números propuestos el último término de la progresion, debe componerse del primero, esto es, del menor de dichos dos números propuestos, mas de tantas veces la razon quantos términos hay antes de él. Luego si del mayor de dichos dos números se resta el menor, la resta contendrá la razon tantas veces, quantos términos debe haber antes del mayor; quiero decir que es el producto de la multiplicacion de dicha razon por el número de los términos que preceden al mayor : luego (56) dividiendo dicha

res-

resta por el número de los términos que deben preceder al mayor, saldrá dicha razon.

Pero el número de los términos que deben preceder al mayor, es mayor de una unidad que el número de los medios que se quiere interponer entre los dos: luego, para interponer entre dos números dados, quantos medios arisméticos se quisiere, se debe restar el menor de dichos números del mayor, y dividir la resta por el número de los medios aumentado de una unidad. El cociente será la diferencia ó la razon que debe reynar en la progresion.

Por egemplo, si entre 4 y 11 se han de interponer 8 medios arisméticos, resto 4 de 11: resta 7 que divido por 9, número de los medios aumentado de la unidad: el cociente $\frac{7}{9}$ es la diferencia que debe reynar en la progresion que por consiguiente será

$$\div 4 \,.\, 4\tfrac{7}{9} \,.\, 5\tfrac{5}{9} \,.\, 6\tfrac{3}{9} \,.\, 7\tfrac{1}{9} \,.\, 7\tfrac{8}{9} \,.\, 8\tfrac{6}{9} \,.\, 9\tfrac{4}{9} \,.\, 10\tfrac{2}{9} \,.\, 11.$$

Igualmente, si se pidiesen 9 medios arisméticos entre 0 y 1: restando 0 de 1, resta 1 que se debería dividir por 10, número de los medios aumentado de la unidad: lo que dá $\frac{1}{10}$ ó 0,1 que será la razon: y por consiguiente la progresion será

$$\div 0 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}3 \,.\, 0{,}4 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1.$$

217 Esto manifiesta que entre dos números, por mas inmediatos que estén el uno al otro, se pueden siempre interponer quantos medios arisméticos se quisiere.

De

Digitized by Google

De las Progresiones geométricas.

218 La progresion geométrica es una *serie* de términos, cada uno de los quales contiene al que le precede, ó es contenido en él un mismo número de veces. Por egemplo esta serie

$$\div\!\!\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

es una progresion geométrica: porque cada término contiene al que le precede el mismo número de veces que aquí es 2: este número de veces es lo que llaman la *razon* de la progresion.

Los quatro puntos que están ántes de la progresion tienen la misma significacion que los dos puntos que están antes de la progresion arismética (211). Pero se ponen quatro para avisar que la progresion es geométrica.

La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun que los términos van aumentando ó disminuyendo.

Considerarémos siempre la progresion geométrica como creciente, porque las propiedades son las mismas en la una que en la otra, mudando la palabra multiplicar en la de dividir, y la de contener en la de ser contenido.

Ya que el segundo término contiene al primero tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del primero multiplicado por la razon.

Ya que el tercer término contiene al segundo tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del segundo multiplicado por la razon, y por consiguiente del

L pri-

Digitized by Google

primero multiplicado por la razon, y multiplicado todavia por la razon: esto es, del primero multiplicado por el quadrado ó la segunda potencia de la razon.

Ya que el quarto término contiene al tercero tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del tercero multiplicado por la razon, y por consiguiente del primero multiplicado por el quadrado de la razon, y todavia multiplicado por la razon: esto es, multiplicado por el cubo ó la tercera potencia de la razon.

Por egemplo, en la progresion arriba puesta, *6* se compone del primer término 3, multiplicado por la razon 2: 12 se compone del primer término 3, multiplicado por el quadrado 4 de la razon 2: 24 se compone del primer termino 3 multiplicado por el cubo 8 de la razon 2.

219 Discurriendo de este modo, se vé que un término qualquiera de la progresion geométrica se compone del primero multiplicado por la razon, levantada á una potencia señalada por el número de los términos que preceden á dicho término qualquiera.

Luego si el primer término de la progresion es la unidad, cada término se compondrá de la misma razon levantada á una potencia señalada por el número de los términos que le preceden: porque la multiplicacion por el primer término, que es la unidad, no aumenta el producto.

Para levantar un número á una potencia propuesta, á la séptima por egemplo, es menester, segun dijimos quando tratamos de las potencias, multiplicar dicho número por

el

el mismo seis veces de seguida: así para levantar 2 á la séptima potencia, diríamos 2 veces 2 son 4, 2 veces 4 son 8, 2 veces 8 son 16, 2 veces 16 son 32, 2 veces 32 son 64, 2 veces 64 son 128 que sería la séptima potencia de 2.

220 Fundados en el principio que acabamos de sentar (219) en órden á la formacion de un término qualquiera de la progresion, probarémos facilmente 1.° que en una progresion geométrica el quadrado del primer término es al quadrado del segundo, como el primer término es al tercero. 2.° que el cubo del primer término es al cubo del segundo como el primer término es al quarto.

El quadrado del segundo término es el quadrado del primero multiplicado por el quadrado de la razon. Dividiendo este producto por el quadrado del primer término, será el cociente el quadrado de la razon. Pero ya que el tercer término es (218) el producto del primero multiplicado por el quadrado de la razon, el cociente del tercer término dividido por el primero, será tambien el quadrado de la razon. Luego hay una misma razon entre el quadrado del primer término y el quadrado del segundo, que entre el primero, y el tercero, pues pende la igualdad de las razones de la igualdad de sus esponentes.

Del mismo modo probaríamos que en qualquiera progresion geométrica el cubo del primer término es al cubo del segundo, como el primer término al quarto.

221 El mismo principio (219), y la obser-

 va-

Digitized by Google

vacion que hemos hecho, pueden servir tambien para calcular un término qualquiera de la progresion, sin que sea preciso calcular los que le preceden. Si se pregunta, por egemplo, quál sería el término 12mo de la progresion

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 \ \&c.$$

Como sé (219) que este término 12mo debe constar del primero, multiplicado por la razon levantada á una potencia indicada por el número de los términos que preceden al 12mo, veo que, para formarle, he de multiplicar 3 por la undécima potencia de la razon 2. Para formar esta undécima potentia, multiplico 2 por el mismo diez veces de seguida, y hallo que esta undécima potencia de 2 es 2048. Multiplico, pues, 2048 por 3, y sale 6144, que será el término 12mo de la progresion.

222 Puede tambien servir el mismo principio para hallar quantos medios proporcionales geométricos se quisieren entre dos números dados. Si se pidiesen tres medios geométricos entre 4 y 64, con un poco de cuidado se echa de ver que estos tres medios geométricos son 8, 16, 32: con efecto $\div 4 : 8 : 16 : 32 : 64$; pero si los números propuestos fuesen distintos de 4 y 64, ó se pidiese otro número qualquiera de medios geométricos, no se hallarian tan facilmente.

Pero valiéndose del principio sentado, se hallarán muy en breve. Toda la dificultad se reduce á hallar la razon que debe reynar en la progresion: porque, una vez hallada, se formarán facilmente los terminos, egecutando multiplicaciones succesivas por dicha razon.

Su-

Digitized by Google

Supongamos, por egemplo, que se pidan nueve medios geométricos entre 2 y 2048.

Será, pues, 2048 el último término de una progresion geométrica que empieza por 2, y debe tener 9 términos entre el primero y el último. Compónese, pues, 2048 del primer término 2, multiplicado por la razon levantada á una potencia indicada por el número de los términos que deben preceder á 2048: luego (56), si dividimos 2048 por el primer término, el cociente será la razon levantada á una potencia señalada por el número de los términos que deben preceder á 2048: luego buscando la raiz de esta potencia, saldrá la razon: pero esta potencia debe ser la décima, porque como ha de haber nueve términos entre 2 y 2048, habrá necesariamente diez antes de 2048: luego se ha de sacar la raiz décima del cociente que resultáre dividiendo el mayor número 2048 por el menor 2.

223 Como el mismo razonamiento se puede aplicar á todos los casos, inferamos, pues, en general, que para interponer entre dos números dados quantos medios geométricos se quisieren, se debe partir el mayor de los dos números por el menor: del cociente que resultáre se sacará una raiz del grado señalado por el número de los medios aumentado de la unidad.

Así, para volver á nuestro egemplo, divido 2048 por 2, sale 1024, de cuyo numero saco la raiz décima: es 2: luego la razon es 2: así, para formar los medios que se piden, multiplico el primer término 2 continuamen-

 te

te por la razon 2 : y habiendo formado nueve medios, hallo 2048, como aquí se ve

÷2: 4: 8: 16: 32: 64: 128: 256: 512: 1024: 2048.

Igualmente si se pidiesen quatro medios geométricos entre 6 y 48, dividiría 48 por 6, y sacaría la raiz quinta del cociente 8. Como 8 no tiene raiz quinta exacta, no se pueden formar exactamente en números quatro medios geométricos entre 6 y 48 : pero podemos aproximarnos á dicha raiz tanto como quisiésemos, por un método análogo al de la raiz quadrada. Basta concebir que es posible hallar un número que, multiplicado quatro veces de seguida por sí mismo, se acerque mas y mas á 8 : y que lo mismo se puede decir de otro número y de otra raiz qualquiera. Y de aquí inferirémos que, entre dos números qualesquiera, se pueden siempre hallar quantos medios geométricos se desearen, sea exactamente, sea por medio de una aproximacion continuada quanto se quisiere, que es lo que basta para la inteligencia de lo que vamos á decir acerca de los logaritmos.

De los Logaritmos.

224 Los logaritmos son unos números en progresion arismética, que corresponden, cada uno al suyo, á igual serie de números en progresion geométrica. Si tenemos, por egemplo, la progresion geométrica y la progresion arismética siguientes:

÷ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.

ca-

cada término de la progresion inferior se llama el *logaritmo* del término que ocupa el mismo lugar en la progresion superior.

225 Un mismo número puede tener una infinidad de logaritmos diferentes, pues á una misma progresion geométrica podemos hacer que corresponda una infinidad de progresiones arisméticas distintas. Como no tratamos de los logaritmos sino con la mira de manifestar los usos para que sirven en los cálculos numéricos, no nos detendrémos en considerar las diferentes progresiones geométricas y arisméticas, entre las quales podríamos hacer la comparacion: hablarémos solo de las que se han considerado en la formacion de las tablas de los logaritmos.

226 La progresion geométrica que han escogido los calculadores de dichas tablas es la décupla, y la progresion arismética es la serie natural de los números: quiero decir que las dos progresiones son las siguientes:

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.
÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.

227 Así será siempre facil averiguar quál sea el logaritmo de la unidad acompañada de quantos ceros se quisiere. Consta siempre este logaritmo de tantas unidades, quantos ceros acompañan á dicha unidad. No declararémos aquí el método por el qual se han hallado los logaritmos de los términos intermedios de la progresion décupla: estriba este método en principios muy distintos de los que hemos sentado hasta ahora: explicarémos no obstante su

formacion por un término que á la verdad no sería el mas breve para calcular dichos logaritmos, pero que basta, así para conocer esta formacion, como para dar razon de los usos para que sirven estos números artificiales.

228 En virtud de la definicion que hemos dado de los logaritmos, se echa de ver que para hallar el logaritmo de un número qualquiera, pongo por caso de 3, es menester que este número pueda ser uno de los de la progresion geométrica fundamental. Pero aunque se percibe que 3 no puede ser un término de la progresion geométrica ÷ 1 : 10 : 100 &c. se echa de ver sin embargo que si entre 1 y 10 se interpolase un número de medios geométricos muy crecido (222), como en este caso se subiría desde 1 á 10 por grados tanto mas inmediatos quanto mayor fuese el número de estos medios, sucedería una de dos cosas, ó que alguno de estos medios se hallaría ser cabalmente el número 3, ó que á lo menos habria dos consecutivos entre los quales estaría el número 3, cada uno de los quales discreparía tanto menos de 3, quanto mayor fuese el número de los medios interpolados.

Esto supuesto, si se interpolasen igualmente entre 0 y 1 tantos medios arisméticos quantos medios geométricos se hubiesen interpolado entre 1 y 10, ya que cada término de la progresion geométrica tiene por logaritmo el término correspondiente de la progresion arismética, se tomaría en esta, por logaritmo de 3, el número que en ella ocupase el mismo lugar que 3 ocupa en la progresion geo-

mé-

métrica; ó si 3 no fuese exactamente alguno de los términos de esta, se tomaría en la progresion arismética el término que correspondiese al de la progresion geométrica que mas se arrimase á 3.

Este es con efecto el método que se podria seguir, si no hubiera otros mas breves: como quiera, á esto viene á reducirse el cálculo de los logarítmos.

229 Conviene, pues, imaginar que habiendo interpolado 10000000 medios geométricos entre 1 y 10, igual número entre 10 y 100, igual número entre 100 y 1000 &c. se ha interpolado tambien igual número de medios arisméticos entre 0 y 1, igual número entre 1 y 2, igual número entre 2 y 3 &c: que habiendo dispuesto todos los primeros en una misma linea, y todos los segundos en otra linea mas abajo, se ha buscado en la primera el número mas inmediato á 2, y se ha tomado en la linea inferior el número correspondiente: que se ha buscado en la primera el número mas inmediato á 3, y en la linea inferior el número correspondiente: que se ha practicado lo mismo succesivamente respecto de los números 4, 5, 6, &c: que finalmente habiendo sentado en una misma columna los números 1, 2, 3, 4, 5, &c. se han escrito en una columna al lado los términos de la progresion arismética que se hallaron corresponder á aquellos, ó á lo menos los que se les arrimaban mas. Con esto se formará concepto de la formacion de los logaritmos, y de su disposicion en las tablas.

Num.

Digitized by Google

Num.	Logaritm.	Num.	Logaritm.	Num.	Logaritm.	Num.	Logaritm.
1	0,000000	41	1,612783	81	1,908485	121	2,082785
2	0,301030	42	1,623249	82	1,913813	122	2,086359
3	0,477121	43	1,633468	83	1,919078	123	2,089905
4	0,602060	44	1,643452	84	1,924279	124	2,093421
5	0,698970	45	1,653212	85	1,929418	125	2,096910
6	0,778151	46	1,662757	86	1,934498	126	2,100370
7	0,845098	47	1,672097	87	1,939519	127	2,103803
8	0,903090	48	1,681241	88	1,944482	128	2,107210
9	0,954242	49	1,690196	89	1,949390	129	2,110589
10	1,000000	50	1,698970	90	1,954242	130	2,113943
11	1,041392	51	1,707570	91	1,959041	131	2,117271
12	1,079181	52	1,716003	92	1,963787	132	2,120573
13	1,113943	53	1,724275	93	1,968482	133	2,123851
14	1,146128	54	1,732393	94	1,973127	134	2,127104
15	1,176091	55	1,740362	95	1,977723	135	2,130333
16	1,204120	56	1,748188	96	1,982271	136	2,133538
17	1,230448	57	1,755874	97	1,986771	137	2,136720
18	1,255272	58	1,763428	98	1,991226	138	2,139879
19	1,278753	59	1,770852	99	1,995635	139	2,143014
20	1,301030	60	1,778151	100	2,000000	140	2,146128
21	1,322219	61	1,785329	101	2,004321	141	2,149219
22	1,342422	62	1,792391	102	2,008600	142	2,152288
23	1,361727	63	1,799340	103	2,012837	143	2,155336
24	1,380211	64	1,806180	104	2,017033	144	2,158362
25	1,397940	65	1,812913	105	2,021189	145	2,161368
26	1,414973	66	1,819543	106	2,025305	146	2,164352
27	1,431363	67	1,826074	107	2,029383	147	2,167317
28	1,447158	68	1,832508	108	2,033423	148	2,170261
29	1,462398	69	1,838849	109	2,037426	149	2,173186
30	1,477121	70	1,845098	110	2,041392	150	2,176091
31	1,491361	71	1,851258	111	2,045323	151	2,178976
32	1,505150	72	1,857332	112	2,049218	152	2,181843
33	1,518513	73	1,863322	113	2,053078	153	2,184691
34	1,531478	74	1,869231	114	2,056904	154	2,187520
35	1,544068	75	1,875061	115	2,060697	155	2,190331
36	1,556302	76	1,880813	116	2,064458	156	2,193124
37	1,568201	77	1,886490	117	2,068185	157	2,195899
38	1,579783	78	1,892094	118	2,071882	158	2,198657
39	1,591064	79	1,897627	119	2,075547	159	2,201397
40	1,602060	80	1,903090	120	2,079181	160	2,204120

Digitized by Google

Num.	Logaritm.	Num.	Logaritm.	Num.	Logaritm.	Num.	Logaritm.
161	2,206825	201	2,303196	241	2,382017	281	2,448706
162	2,209515	202	2,305351	242	2,383815	282	2,450249
163	2,212187	203	2,307496	243	2,385606	283	2,451786
164	2,214843	204	2,309630	244	2,387389	284	2,453318
165	2,217483	205	2,311753	245	2,389166	285	2,454844
166	2,220108	206	2,313867	246	2,390935	286	2,456366
167	2,222716	207	2,315970	247	2,392697	287	2,457881
168	2,225309	208	2,318063	248	2,394451	288	2,459392
169	2,227886	209	2,320146	249	2,396199	289	2,460897
170	2,230448	210	2,322219	250	2,397940	290	2,462398
171	2,232996	211	2,324282	251	2,399673	291	2,463893
172	2,235528	212	2,326335	252	2,401400	292	2,465382
173	2,238046	213	2,328379	253	2,403120	293	2,466867
174	2,240549	214	2,330413	254	2,404833	294	2,468347
175	2,243038	215	2,332438	255	2,406540	295	2,469822
176	2,245512	216	2,334453	256	2,408240	296	2,471291
177	2,247973	217	2,336459	257	2,409933	297	2,472756
178	2,250420	218	2,338456	258	2,411619	298	2,474216
179	2,252853	219	2,340444	259	2,413299	299	2,475671
180	2,255272	220	2,342422	260	2,414973	300	2,477121
181	2,257678	221	2,344392	261	2,416640	301	2,478566
182	2,260071	222	2,346353	262	2,418301	302	2,480006
183	2,262451	223	2,348304	263	2,419955	303	2,481442
184	2,264817	224	2,350248	264	2,421603	304	2,482873
185	2,267171	225	2,352182	265	2,423245	305	2,484299
186	2,269512	226	2,354108	266	2,424881	306	2,485721
187	2,271841	227	2,356025	267	2,426511	307	2,487138
188	2,274157	228	2,357934	268	2,428134	308	2,488550
189	2,276461	229	2,359835	269	2,429752	309	2,489958
190	2,278753	230	2,361727	270	2,431363	310	2,491361
191	2,281033	231	2,363612	271	2,432969	311	2,492760
192	2,283301	232	2,365488	272	2,434568	312	2,494154
193	2,285557	233	2,367355	273	2,436162	313	2,495544
194	2,287801	234	2,369215	274	2,437750	314	2,496929
195	2,290034	235	2,371067	275	2,439332	315	2,498310
196	2,292256	236	2,372912	276	2,440909	316	2,499687
197	2,294466	237	2,374748	277	2,442479	317	2,501059
198	2,296665	238	2,376577	278	2,444044	318	2,502427
199	2,298853	239	2,378397	279	2,445604	319	2,503790
200	2,301030	240	2,380211	280	2,447158	320	2,505150

Digitized by Google

230 En esta tabla conviene reparar el primer guarismo de cada logaritmo ácia la izquierda que se llama la *característica*; porque este guarismo señala en que década está el número, al qual pertenece dicho logaritmo. Por egemplo, si un logaritmo tiene por característica 3, saco que pertenece á la década de los millares, porque el logaritmo de 1000 es 3; y siendo 4 el de 10000, todo número desde 1000 hasta 10000 no puede tener por logaritmo sino 3 y un quebrado. Tiene, pues, 3 por característica, y los demas guarismos expresan dicho quebrado reducido á decimales.

Propiedades de los Logaritmos.

231 Como aquí solo tratamos de los logaritmos quales los hallamos en las tablas ordinarias, las propiedades que vamos á declarar solo se verifican en las progresiones geométricas, cuyo primer término es la unidad, y en las progresiones arisméticas que tienen 0 por primer término.

Bolvamos, pues, á comparar, cotejando uno con otro los dos términos que se corresponden, una progresion geométrica qualquiera, cuyo primer término sea la unidad, con una progresion arismética, tambien qualquiera, cuyo primer término sea 0: por egemplo, las dos progresiones siguientes:

$\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.
$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.

Infiérese de la naturaleza y de la perfecta correspondencia de de estas dos progresiones, que quantas veces la razon de la primera es factor en qualquiera de sus términos, tantas veces la razon de la segunda es contenida en el término correspondiente de esta segunda. Por egemplo, en el término 2187, la razon 3 es siete veces factor, y en el término 28 cabe 7 veces la razon 4.

Con efecto, segun digimos (213 y 219), la razon es factor en un término qualquiera de la primera progresion tantas veces quantos términos hay antes de él: y en la segunda un término qualquiera contiene tantas veces la razon quantos términos hay antes de él. Pero antes del uno y del otro hay un mismo número de términos. Luego &c.

Inferamos de aquí que un término qualquiera de la progresion geométrica tendrá siempre por correspondiente en la progresion arismética un término que contendrá la razon de esta tantas veces quantas la razon de la otra fuere factor en el primero.

232 Luego si se multiplican uno por otro dos términos de la progresion geométrica, y se suman al mismo tiempo los dos términos correspondientes de la progresion arismética, el producto y la suma serán dos términos que se corresponderán en estas progresiones. Porque es evidente que la razon será factor en el producto tantas veces quantas lo es en el multiplicando y el multiplicador juntos: y que la razon de la progresion arismética será contenida en la suma tanto como lo es en ambos términos sumados.

Lue-

233 Luego se puede, sumando dos términos de la progresion arismética, conocer el producto de los dos términos correspondientes de la progresion geométrica.

Por egemplo, sumando los dos términos 8 y 24 que corresponden á 9 y á 729, sale 32 que corresponde á 6561: de lo que infiero que el producto de 729 por 9 es 6561, y lo es con efecto.

234 Luego yá que los números naturales que componen la primera columna de la tabla, se han sacado de una progresion geométrica que empieza por la unidad: y ya que sus logaritmos son los términos correspondientes de una progresion arismética que empieza por cero, hemos de inferir que sumando los logaritmos de los números, se forma el logaritmo de su producto.

Usos de los Logaritmos.

235 Para hacer una multiplicacion por logaritmos, se ha de sumar el logaritmo del multiplicando con el logaritmo del multiplicador: la suma será el logaritmo del producto, por lo que, buscando esta suma entre los logaritmos de las tablas, se hallará el producto al lado.

Por egemplo, si me propongo multiplicar 14 por 13, hallo en la tabla que

el logaritmo de 14 es......	1,146128
y que el de 13 es...........	1,113943
la suma.................	2,260071

cor-

corresponde en la misma tabla al número 182 que con efecto es el producto.

236 Luego para quadrar un número basta duplicar su logaritmo, pues se habia de sumar este logaritmo con el mismo para multiplicar el número por el mismo.

237 Por la misma razon, para cubar un número, se deberá triplicar su logaritmo: y en general para levantar un número á una potencia qualquiera, se deberá tomar su logaritmo tantas veces quantas unidades hay en el número que señala dicha potencia: esto es, se deberá multiplicar su logaritmo por el número que señala dicha potencia. Por egemplo, para levantar un número á la séptima potencia, se deberá multiplicar por 7 el logaritmo de dicho número.

238 Luego recíprocamente para sacar la raiz quadrada, cúbica, quarta, &c. de un número propuesto, se deberá dividir el logaritmo de dicho número por 2, 3, 4 &c: esto es, en general, por el número que señala el grado de la raiz que se quiere sacar.

Por egemplo, si se pide la raiz quadrada de 144, veo que en la tabla el logaritmo de este número es 2,158362: tomo su mitad 1,079181: busco entre los logaritmos donde está 1,079181: hallo que corresponde á 12, que es por consiguiente la raiz quadrada de 144.

Si se pide la raiz séptima de 128, busco en la tabla su logaritmo, que es 2,107210: le divido por 7, y busco á qué número corresponde en la tabla el cociente te 0,301030 : veo que corresponde á 2, que con efecto es la raiz séptima de 128.

239 Para hallar el cociente de la division de un número por otro, se debe restar el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, y buscar en la tabla á qué número corresponde el logaritmo restante : dicho número será el cociente.

Por egemplo, si se quiere dividir 187 por 17, busco en la tabla los logaritmos de estos dos números y hallo

log. de 187	2,271842
log. de 17	1,230449
la diferencia	1,041393

corresponde en la tabla á 11, que es con efecto el cociente.

Si no se pudiese egecutar cabalmente la division, el logaritmo restante no se hallaría todo entero en los tablas; pero muy en breve dirémos lo que hay que hacer en este caso.

Fúndase esta regla en que como el cociente multiplicado por el divisor ha de reproducir el dividendo (56), debe tambien el logaritmo del cociente sumado (235) con el logaritmo del divisor componer el logaritmo del dividendo : y por consiguiente el logaritmo del cociente vale el logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

249 De lo que acabamos de decir se puede inferir fa-

facilmente que para hacer una regla de tres por logaritmos, se debe sumar el logaritmo del segundo término con el logaritmo del tercero, y restar de la suma el logaritmo del primer término.

241 Adviértase que quando se busca en las tablas ordinarias un logaritmo procedente de algunas operaciones por otros logaritmos, si dicho logaritmo no discrepa del de la tabla sino en el último guarismo, se debe mirar como nula esta diferencia: porque los logaritmos de todos los números que están entre los de la progresion décupla, no están aproximados sino con diferencia de una media unidad decimal de séptima órden.

De los Números cuyos Logaritmos no se hallan en las tablas.

242 No se hallan en las tablas los logaritmos de los quebrados y de los números enteros juntos con quebrados: lo mismo sucede respecto de las raices quadradas, cúbicas, &c. de los números que no son potencias cabales del grado de dichas raices.

Quando se pida el logaritmo de un número entero junto con un quebrado, se deberá primero reducir todo á quebrado, y restar despues el logaritmo del denominador del logaritmo del nuevo numerador. Por egemplo, para hallar el logaritmo de $8\frac{3}{11}$, busco el de $\frac{91}{11}$, que hallo restando 1,041393 logaritmo de 11, de 1,959041 logaritmo de 91: la resta 0,917648 es el logaritmo de $8\frac{3}{11}$, porque $8\frac{3}{11}$ ó $\frac{91}{11}$ es lo mismo que 91 dividido por 11 (78).

Digitized by Google

243 La misma razon prueba que para hallar el logaritmo de un quebrado, se debe restar igualmente el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador: pero como esta sustraccion no se puede hacer, pues el logaritmo del denominador será mayor que el del numerador, se restará al contrario el logaritmo del numerador del logaritmo del denominador: la resta, que representará lo que falta para poder restar el logaritmo del denominador del logaritmo del numerador, será el logaritmo del quebrado; antes de cuya resta se escribirá el signo — que dá á entender que no se pudo egecutar la sustraccion. En virtud de esto el logaritmo del quebrado $\frac{11}{91}$ sería — 0,917648. Prevenimos de paso que toda cantidad que lleva el signo — se llama *negativa*.

244 Este signo — sirve para recordarle al calculador que los logaritmos de los quebrados se deben tomar en el cálculo segun una regla del todo opuesta á la que hemos dado respecto de los logaritmos de los números enteros, ó de los números enteros juntos con quebrados: quiero decir, que si ocurriese multiplicar por un quebrado, se habrá de restar el logaritmo de dicho quebrado: si al contrario se ofreciese dividir por un quebrado, se deberá añadir su logaritmo.

La razon de esto es, respecto de la multiplicacion, que multiplicar por un quebrado, viene á ser lo mismo que multiplicar por el numerador, y dividir despues por el denominador: luego quando se calcula por logaritmos, se

Digitized by Google

se debe sumar el logaritmo del numerador, y restar despues el logaritmo del denominador, ó, lo que viene á ser lo mismo, se debe restar solamente el exceso que el logaritmo del denominador lleva al logaritmo del numerador, cuyo exceso es cabalmente el logaritmo del quebrado. Respecto de la division es igualmente facil percibir la razon. Con efecto, dividir por $\frac{3}{4}$, por egemplo, es lo mismo que multiplicar por $\frac{4}{3}$ (*91*): luego quando se calcula por logaritmos, se debe añadir el logaritmo de $\frac{4}{3}$, esto es, (242) la diferencia entre el logaritmo de 4 y el logaritmo de 3, ó entre el logaritmo del denominador del quebrado propuesto, y el logaritmo de su numerador.

245 Puede ocurrir, y ocurre con bastante frecuencía, que, reduciendo á solo un quebrado, el entero y el quebrado cuyo logaritmo se busca, sea el numerador mayor que el número mayor de las tablas: por egemplo, si se pide el logaritmo de $53\frac{821}{5704}$, este número reducido á quebrado, es $\frac{303133}{5704}$, cuyo numerador pasa los límites de las tablas mas estensas.

Conviene, pues, saber cómo se puede hallar el logaritmo de un número que pasa estos límites. El método que vamos á dar no es exacto, pero es muy bastante para los usos ordinarios. Antes de declararle conviene observar:

246 1.° que añadirla 1, 2, 3, &c. unidades á la característica del logaritmo de un número, es lo mismo que multiplicar este número por 10, 100, 1000 &c. porque es añadir el logaritmo de 10, ó de 100, ó de 1000

M 2 &c.

&c. al logaritmo del espresado número (227 y 235).

2.° Al contrario, quitarla 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un logaritmo es dividir el número correspondiente por 10, 100, 1000 &c.

247 Esto supuesto, supongamos que se trate de hallar el logaritmo de 357859.

Separaré con una coma en este número ácia la derecha, tantos guarismos quantos fuere menester, á fin de que el número restante se halle en las tablas. En el caso presente, por egemplo, separaré dos guarismos, de lo que resulta 3578,59 que es (118) 100 veces menor que el número propuesto 357859.

Busco en las tablas el logaritmo de 3578, que hallo ser 3,5536403: tomo al mismo tiempo la diferencia 1214 entre dicho logaritmo, y el de 3579. Hecho esto, hago esta regla de tres: Si por 1 unidad de diferencia entre los dos números 3578 y 3579,
hallamos la diferencia 1214 entre sus logaritmos: siendo 0,59 la diferencia entre los dos números 3578, 59 y 3578,
¿qué diferencia saldrá entre sus dos logaritmos?
quiero decir que busco el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son

$$1 : 1214 :: 0,59 :$$

Este quarto término es 716, 26, ó solamente 716, despreciando las decimales: añado pues 716 al logaritmo

3,

Digitized by Google

3,5536403 de 3578, y sale 3,5537119 que es el logaritmo de 3378,59. Para sacar el de 357859, no hay mas que añadir 2 unidades á la característica del logaritmo que se acaba de hallar, y el logaritmo que se busca será 5,5537119, pues 357859 es 100 veces mayor que 3578,59.

Si los guarismos que se han de separar ácia la derecha fuesen todos ceros, despues de haber hallado en las tablas el logaritmo de los guarismos que hubieren quedado ácia la izquierda, bastaría añadir tantas unidades á la característica quantos ceros se hubiesen separado.

248 Si se hubiese de buscar el logaritmo de un número que tiene decimales, se buscará dicho logaritmo, como si no hubiese coma alguna en el número propuesto: y despues de haberle hallado, sea inmediatamente en las tablas, sea por el método que acabamos de declarar (247), se le quitarán á la característica tantas unidades quantas decimales hubiere en el número propuesto: porque habiendo considerado el número como si no tubiese coma, esto es, cómo 10, 100, 1000 &c. veces mayor de lo que es, se le debe dar su verdadero valor, haciendo en la característica de su logaritmo la diminucion correspondiente (246).

249 Finalmente si el número propuesto expresára solas decimales, se buscará este número en las tablas, como si no llevase coma: y tomando el logaritmo correspondiente, se restará de un número compuesto de tantas uni-

Digitized by Google

dades quantas decimales hubiere en el número propuesto cuyo logaritmo se busca, y se le dará á la resta el signo —. Por egemplo, para hallar el logaritmo de 0,03, busco el de 3, que es 0,477121: le resto de 2 unidades, y dando á la resta el signo —, sale — 1,522879, que es el logaritmo de 0,03. Con efecto, 0,03 no es otra cosa que $\frac{3}{100}$; pero para hallar el logaritmo de $\frac{3}{100}$ es menester (243) restar el logaritmo de 3 del de 100, y darle á la resta el signo —.

De los Logaritmos cuyos números no se hallan en las tablas.

250 Esta investigacion no es menos necesaria que la precedente. Por egemplo, en la division sucede pocas veces que el cociente sea un número entero: y si se hace la operacion por logaritmos, no se hallará en las tablas el logaritmo restante, sino quando el cociente fuere un número entero. Hay muchísimos casos parecidos á este.

251 Propongámonos primero hallar á qué número corresponde un logaritmo propuesto, ora pase los límites de las tablas, ora esté entre los logaritmos de las tablas.

Se le quitarán á la característica tantas unidades quantas fuere menester, para que se puedan hallar en las tablas los primeros guarismos del logaritmo propuesto, mediante esta preparacion. Si todos los guarismos se encuentran entonces en las tablas, el número que se busca será el número mismo que estubiere á su lado en las tablas: pero añadiendo á su continuacion tantos ceros quantas unidadades se le hubiesen quitado á la característica (246).

Por egemplo, el logaritmo 7,2273467 se halla despues de haber quitado tres unidades á la característica que corresponde al número 16879; infiero que el logaritmo propuesto 7,2273467 es el de 16879000.

Si no se hallaren en las tablas mas que los primeros guarismos del logaritmo, se practicará lo que en el egemplo siguiente.

Para hallar á qué número corresponde el logaritmo 5,2432668, quito dos unidades á su característica: el logaritmo 3,2432668, que sale entonces, está entre los logaritmos de 1750 y 1751: el número al qual corresponde, es, pues, 1750 y un quebrado.

A fin de hallar este quebrado, resto del logaritmo 3,2432668 el logaritmo de 1750, y sale la diferencia 2288.

Tomo tambien en las tablas la diferencia 2481 entre los logaritmos de 1751 y 1750: concluido esto, hago esta regla de tres:

Si 2481, diferencia entre los logaritmos de 1751 y 1750,

dan una unidad de diferencia entre estos números:

¿qué diferencia dará de números la diferencia 2288 entre el logaritmo propuesto y el de 1750?

Hallo el quarto término $\frac{2288}{2481}$: así el logaritmo 3,2432668 pertenece al número 1750 $\frac{2288}{2481}$ con muy poca diferencia. Por consiguiente el logaritmo propuesto que pertenece á un número cien veces mayor (246) será el logaritmo de $175000\frac{228800}{2481}$, esto es, de $175092\frac{548}{2481}$ ó reduciendo á decimales, corresponde á 175092,22.

252 Si el logaritmo propuesto estubiese entre los de las tablas, no se le deberia quitar unidad alguna á la característica, y por consiguiente tampoco habria que añadir ceros al fin de la operacion, que en quanto á lo demas se egecutaria del mismo modo.

253 Pero como la proporcion de que usamos en este método no es de todo punto exacta, y solo se acerca á la verdad en quanto los números que se buscan son grandes: si el logaritmo propuesto fuese menor que el de 1500, seria menester, para mayor exactitud, añadirle á su característica quantas unidades fuese posible, sin pasar los límites de las tablas: y habiendo hallado el número que estubiese mas cerca de corresponderle en las tablas, se separarán con una coma en este número ácia la derecha tantos guarismos quantas unidades se hubiesen añadido á la característica, y esto bastará las mas veces: pero si se desearen mas decimales, se hará la proporcion como arriba (251); y reduciendo el quarto término á decimales se escribirán estas á continuacion de las que yá se hubiesen hallado.

Por egemplo, si se pide á qué numero corresponde el logaritmo 0,5432725: como este logaritmo está entre los de 3 y de 4, y por consiguiente el número al qual pertenece es mucho menor que 1500, busco este logaritmo despues de añadidas tres unidades á su característica: esto es, busco 3,5432725: hallo que está entre

los

los logaritmos de 3493, y 3494: de lo que infiero que el número que busco es 3,493 con diferencia de menos de una milésima. Pero si no basta esta aproximacion, tomaré la diferencia entre el logaritmo 3,5432725 y el de 3493, esto es, 739: tomaré igualmente la diferencia 1243 entre los logaritmos de 3494 y 3493, y buscaré discurriendo como arriba (251), el quarto término de una proporcion que empezaria por los tres siguientes

$$1243 : 1 :: 739 :$$

Este quarto término valuado en decimales, es 0,594: luego el número que se buscaba es 3,493594.

Es de considerar que esta segunda aproximacion es limitada: porque como los logaritmos de las tablas no son exactos, sino con diferencia de cerca una media unidad decimal de séptima orden, esta corta discrepancia influye en las diferencias de los logaritmos: pero siempre se puede proseguir con confianza la aproximacion hasta tres decimales: por lo demas, se vé pocas veces un calculador en la precision de proseguirla tanto: pero esta advertencia debe servir tambien para guiarnos en el uso que hicimos arriba (247 y 251) de la misma proporcion.

254 Si se quisiere hallar el quebrado al qual corresponde un logaritmo negativo propuesto, se restará dicho logaritmo de 1, ó 2, ó 3, ó 4 &c. unidades, segun la estension de las tablas; y despues de haber hallado el número que corresponde al logaritmo restante, se separarán

con

con una coma, ácia la derecha, tantos guarismos quantas unidades hubiere en el número del qual se hubiese restado el logaritmo negativo propuesto.

Por egemplo, si se pregunta á qué quebrado corresponde el logaritmo — 1,532732, resto 1,532732 de 4, y resta 2,467268, que en las tablas se halla entre los logaritmos de 293 y de 294. Infiero, pues, que el quebrado que se busca está entre 0,0293 y 0,0294: esto es, que es 0,0293 con diferencia de menos de una diezmilésima. Con efecto, restar de 4 el logaritmo propuesto 1,532732, es (244) multiplicar 10000 por el quebrado al qual pertenece el mismo logaritmo propuesto, ó (lo que es lo mismo) es multiplicar este quebrado por 10000: luego el número que se halla es 10000 veces mayor: es, pues, preciso contarle por diezmilésimas.

Se ofrecerán en adelante con mucha frecuencia ocasiones de aplicar toda esta doctrina. Pero no puedo menos de manifestar aquí con algunos egemplos quán socorridos son los logaritmos para calcular con igual presteza que facilidad.

EGEMPLO I.

Se pide el cociente de 17954 dividido por 12836, aproximado con diferencia de menos de una diezmilésima.

Log. de 17954	4,254161
Log. de 12836	4,108430
resta	0,145731

Es-

Esta resta buscada en las tablas con una característica mayor de 4 unidades, corresponde á 13987 : luego (246) el cociente que se pide es 1,3987.

EGEMPLO II.

Se pide la raiz cúbica de 53 con diferencia de menos de una milésima.

El log. de 53 es 1,724276

su tercio (238) es . . . . . . 0,574759.

Este último buscado en las tablas con una característica mayor de 3 unidades, corresponde á 3756 : luego (246) la raiz que se pide es 3,756.

EGEMPLO III.

Si se quisiere sacar, con diferencia de menos de una centésima, la raiz quinta del cubo de 5736,

Se triplicará el logaritmo 3,758609 de 5736: y será 11,275827 el logaritmo del cubo de 5736. Tomando el quinto de este último logaritmo, sale 2,255165, que es el logaritmo de la raiz quinta del cubo de 5736. Este logaritmo buscado en las tablas con una característica mayor de dos unidades, para tener centésimas, corresponde entre los números 17995 y 17996: es, pues, la raiz que buscamos 179,95 con diferencia de menos de una centésima.

EGEMPLO IV.

Supongamos que se trate de hallar quatro medios geométritricos proporcionales entre $2\frac{2}{3}$ y $5\frac{3}{4}$.

Para hallar la razon que debe reynar en la progresion, habriamos de (223) dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, y sacar la raiz quinta del cociente.

Por medio de los logaritmos esta operacion es muy sencilla. Determino por las tablas el logaritmo de $5\frac{3}{4}$, ó $\frac{23}{4}$, que es 0,759668. Determino igualmente el logaritmo de $2\frac{2}{3}$, que es 0,425969. Resto, pues, este logaritmo (239) del primero: sale 0,333699: tomando (238) el quinto de este logaritmo último, sale 0,066740 que es el logaritmo de la razon que se busca. Este logaritmo buscado en las tablas con una característica mayor de 4 unidades para sacar 4 decimales, corresponde á 11661, con diferencia de menos de una unidad: luego la razon es 1,1661, con diferencia de menos de una diezmilésima. Para hallar los medios proporcionales, no hay sino multiplicar el primer término $2\frac{2}{3}$ por 1,1661: despues el producto por 1,1661, y así prosiguiendo.

Pero pueden hacerse estas operaciones mas brevemente valiéndose de los logaritmos, añadiendo succesivamente al logaritmo 0,425969 del primer término $2\frac{2}{3}$, el logaritmo 0,066740 de la razon, su duplo, su triplo, y su quádruplo: de suerte que saldrán 0,492709: 0,559449: 0,626189: 0,692929, que son los logaritmos de los quatro medios proporcionales que se piden. Y si se buscan estos logaritmos en las tablas con una característica au-

aumentada de 3 unidades, se hallará que estos quatro medios proporcionales son 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

Del Complemento Arismético.

255 Quando se hace alguna operacion por logaritmos, y se ofrece restar algunos, se puede simplificar la operacion teniendo presente la observacion siguiente.

Quando ocurre restar un número qualquiera de otro, que es la unidad acompañada de tantos ceros quantos guarismos hay en el primero, la operacion se reduce á escribir la diferencia entre 9 y cada uno de los guarismos del número propuesto, á excepcion del último, respecto del qual se escribe la diferencia que hay entre 10 y dicho guarismo. Por egemplo, si he de restar 526927 de 1000000, resto succesivamente los guarismos 5, 2, 6, 9, 2, de 9, y el último guarismo 7 le resto de 10, y saco la resta 473073.

Esta resta se llama el *complemento arismético* del número propuesto.

Como la sustraccion que se hace por este método es tan sencilla, que no se puede considerar como una operacion, se infiere que quando hubiese que formar un resultado de la adicion y de la sustraccion de muchos números, siempre se podrá reducir la operacion á la adicion. Por egemplo, si se trata de sumar los dos números 672736, 426452, y de restar de su suma los dos números 432752, 18675, para cuya operacion se han de ege-

cu-

cutar dos adiciones, y una sustraccion; sustituyo en lugar de esta operacion la siguiente.

	672736
	426452
Comp. arism. de 432752 . . .	567248
Comp. arism. de 18675	981325
suma	~~2~~647761

Quiero decir que sumo los dos primeros números propuestos con los complementos arisméticos de los dos últimos: la suma es 2647761. En esta se debe borrar el primer guarismo 2: y los guarismos restantes 647761 son el resultado que se buscaba.

Se manifiesta la razon de esto, reparando que si en vez de restar 432752 conforme venia propuesto, añado su complemento arismético, esto es 1000000 menos 432752, hago á un mismo tiempo la sustraccion propuesta y un aumento de 1000000: esto es, de 1 decena en el primer guarismo del resultado: luego por razon de cada complemento arismético que hubiere introducido, habrá una decena de mas respecto del primer guarismo del resultado.

Es facil aplicar esto á los logaritmos.

Supongamos que se trate de dividir 3760 por 79; se debería restar el logaritmo de 79 del de 3760. En lugar de esta operacion escribo

Log.

Log. de 3760 3,575188
Comp. arism. del log. de 79 8,102373

suma .... $\cancel{1}1,677561$

Así 1,677561 es el logaritmo del cociente, y corresponde á 47, 59 con diferencia de menos de una centésima.

Para segundo egemplo supondremos que se ofrezca multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$; se debería multiplicar 675 por 952, y 527 por 377, y dividir despues el primer producto por el segundo: por logaritmos se hará la operacion del modo siguiente.

Log. de 675 2,829304
Log. de 952 2,978637
Comp. arism. del log. de 527 7,278189
Comp. arism. del log. de 377 ... 7,423659

suma .... $\cancel{2}0,509789$

El logaritmo del producto es, pues, 0,509789, que buscándole con tres unidades mas en la característica corresponde á 3,234.

Puede servir el complemento arismético para darles á los logaritmos de los quebrados la misma forma que á los de los números enteros, y usar de ellos del mismo modo en los cálculos: con esto se escusará la distincion de los logaritmos en negativos y positivos. Bastará tener presente que la característica del logaritmo de los quebrados propios

pios es mayor de lo que debe ser de 10 unidades.

Por egemplo, para hallar el logaritmo de $\frac{3}{4}$, que es (78) 3 dividido por 4, en vez de restar el logaritmo de 4 del de 3: esto es, de restar el logaritmo de 3 del de 4, y de dar á la resta el signo — (243): al logaritmo de 3 añado el complemento arismético del logaritmo de 4.

Log. de 3	0,477121
Comp. arism. del log. de 4	9,397940
suma	9,875061

Esta suma es el logaritmo de $\frac{3}{4}$, cuya característica tiene 10 unidades mas de lo que debe. No es necesario hacer actualmente la diminucion: se puede dejar para el fin de las operaciones, en las quales se hiciese uso de este logaritmo.

La misma regla se aplica á los quebrados decimales; así para hallar el logaritmo de 0,575 que no se distingue de $\frac{575}{1000}$, al logaritmo de 575 añadiria el complemento arismético del logaritmo de 1000.

Valiéndose de los complementos arisméticos, en lugar de los logaritmos negativos de los quebrados, es igualmente facil hallar en las tablas el valor de dichos quebrados en partes decimales.

Una vez que sé que un logaritmo propuesto es, ó contiene uno ó muchos complementos arisméticos, sé por lo mismo que su característica es mayor de tantas decenas, quan-

Digitized by Google

quantos complementos arisméticos entran en el logaritmo propuesto: así si es mayor que este número de decenas, será facil disminuirla y hallar á qué número corresponde dicho logaritmo, que corresponderá á un número entero, ó á un número entero junto con un quebrado.

Pero si la característica fuese menor que el número de decenas que contiene de mas, pertenece seguramente á un quebrado que hallaré del modo siguiente: buscaré en virtud de lo dicho (250 y sig.) á qué numero corresponde el logaritmo propuesto, y habiéndole hallado, separaré con una coma tantas decenas de guarismos, empezando por la derecha, quantas decenas de mas hubiere en la característica.

Por egemplo, si de resultas de una operacion, en la qual hubiese entrado un complemento arismético, se me ofreciese el logaritmo 8,7322235, vería que pertenece á un quebrado, porque su característica no llega á una decena. Busco primero (250) á qué número corresponde 8,7322235, considerado como logaritmo de número entero: hallo que corresponde á 539802500: separando diez guarismos, sale 0,0539802500, que es el valor muy aproximado del quebrado que corresponde al logaritmo propuesto.

Pero como se necesita pocas veces hallar estos quebrados con tanta exactitud, se abreviará la operacion disminuyendo sobre la marcha la característica del logaritmo propuesto quanto fuere menester, para que se halle en las

Digitized by Google

tablas: y tomando solamente el número correspondiente, se separarán tantos guarismos menos de los que prescribe la regla precedente, quantas unidades se le hubieren quitado á la característica. Así, en el caso presente, quitaría á la característica cinco unidades: y habiendo hallado que el número correspondiente es 5398, separaría solo cinco guarismos, y saldría 0,05398.

En la formacion de las potencias se deberá observar que multiplicando (237) el logaritmo por el número que espresa el grado de la potencia, se multiplicará tambien el número que la característica llevâre de mas. Por lo que, si quando se forma un cubo, por egemplo, entra un complemento arismético en el logaritmo propuesto: esto es, si la característica contiene 10 unidades mas de lo que debe, la del logaritmo del cubo contendrá 30 unidades mas, y así de las otras potencias: será pues facil reducirla á su justo valor.

En la estraccion de las raices, para escusar equivocaciones, quando entraren complementos arisméticos en los logaritmos de que se hiciere uso, se la añadirán ó quitarán á la característica tantas decenas quantas fuere menester, á fin de que lo que llevâre de mas, sea cabalmente de tantas decenas quantas unidades hay en el número que espresa el grado de la raiz: la característica será mayor de lo que debe, cabalmente de 10 unidades.

Por egemplo, si se pide la raiz cúbica de $\frac{276}{547}$, al logaritmo de 276 añado el complemento arismético del de 547.

Log.

Log. de 276	2,440909,
Comp. arism. del log. de 547	7,262013
suma	9,702922.
á cuya característica añado	20
	29,702922.

á fin de que lleve 3 decenas de mas: y sale 29,702922, cuyo tercio 9,900974 es el logaritmo de la raiz cúbica que se pide: pero con exceso de 10 unidades en la característica. Así en virtud de lo dicho poco antes, hallo que esta raiz cúbica es 0,7961 con diferencia de menos de una diezmilésima.

Son de muchísimo uso los complementos arisméticos, principalmente en los cálculos de la Trigonometría, y por consiguiente en la Geometría práctica.

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA.

Figura. 256 EL espacio que ócupan los cuerpos tiene siempre tres dimensiones, que son *longitud*, *latitud* y *profundidad* ó *grueso*. Aunque no existe cuerpo alguno que no tenga todas estas tres dimensiones juntas, solemos no obstante separarlas con el pensamiento: así quando hablamos de la profundidad de un rio, por egemplo, no atendemos á lo que coge de largo, ni de ancho.

Distinguirémos, pues, tres especies de estension: la estension en sola longitud, que llamarémos *linea*: la estension en longitud y latitud solamente, que llamarémos *superficie*: finalmente la estension en longitud, latitud y profundidad, que llamarémos *volumen* ó *sólido*.

El objeto de la Geometría es considerar las propiedades de cada una de estas tres especies de estension.

De las Lineas.

257 Supondrémos en estos elementos que todas las lineas y superficies que considerarémos están en un plano ó superficie plana. Por *plano* entendemos una superficie que no tiene ni hoyos ni eminencias, ni es curva: tal viene á ser la superficie de una mesa muy lisa. De modo que llamarémos plano una superficie sobre la qual si se tira una linea recta, todos los puntos de esta linea es-

están en dicha superficie y la tocan.

Hay tres especies de lineas, la *recta*, la *curva* y la *mixta*: ántes de definirlas conviene dar á conocer el punto. Fig.

258 Llámanse *puntos* los estremos de una linea. Tambien llamamos *punto* el lugar donde es cortada una linea, ó en el qual las lineas se encuentran ó concurren. De modo que se puede considerar el punto como una porcion de estension que tubiese infinitamente poca longitud, latitud y profundidad.

259 Sentado esto, llámase línea *recta* aquella cuyos puntos están todos en una misma direccion: tal es la linea
A B. Por este motivo definen algunos la linea recta, di- 1.
ciendo que es la que trazaría un punto que se moviese de modo, que encaminándose continuamente, sin desviarse, ácia un solo y mismo punto, dejaría rastro de sí. Si el punto *A*, moviéndose sin desviarse para ir desde *A* á *B*, dejase á cada paso que diese un rastro, formaría la linea recta *A B.*

260 La línea *curva* es aquella cuyos puntos no es-
tán en una misma direccion: la linea *AEB* es una linea 2.
curva. Por lo que definen algunos la linea curva diciendo, que es la que forma un punto, que yendo desde un punto á otro, y desviándose á cada paso del camino recto, deja rastro de sí.

261 Llámase línea *mixta* la que es en parte recta
y en parte curva: tal es la linea *ABCD.* 3.

De estas definiciones dimanan las tres proposiciones si-

Fig. siguientes, cuya evidencia es tan patente, que no necesitan de prueba.

262 1.° *Desde un punto á otro no se puede tirar mas de una linea recta; pero se pueden tirar una infinidad de lineas curvas.*

4. Salta esto á la vista solo con mirar la figura, en la qual se echa de ver, que desde el punto *A* al punto *B* no se puede tirar mas que la linea recta *A B*: bien que desde el primer punto al segundo se pueden tirar muchas lineas curvas, como las *AEB*, *ADB* &c.

263 2.° *La linea recta es la mas corta que se puede tirar desde un punto á otro.*

Por egemplo, la linea *A B*, tirada desde el punto *A*

4. al punto *B*, es mas corta que cada una de las lineas *AEB*, *ADB* y *ACB*, que son mas largas á proporcion que mas se apartan de la recta *A B*, por ser mayor el rodeo del punto cuyo rastro se supone que son: por lo que *es la linea recta la medida exacta de la distancia que hay entre dos puntos*, conforme probarémos mas adelante.

264 *Para determinar la posicion de una linea recta, basta conocer dos de sus puntos: de suerte que si se conoce la posicion de dos puntos, se conoce tambien la de toda la linea.*

Como esta proposicion nos servirá muchísimo en adelante, es del caso detenernos en hacer patente su verdad.

Es evidente que muchas lineas rectas pueden pasar por un mismo punto: por egemplo, la linea *C D*, y la li-línea *AB*, pasan ambas por el punto *E*, y se puede hacer que pasen infinitas por dicho punto : por lo que un punto solo no determina la posicion ó direccion de una linea recta ; pero si se toman dos puntos como *E* y *F*, no es posible tirar por estos dos puntos mas lineas rectas que la *CD*: porque es patente que todas las lineas rectas que pasaren por los dos puntos *E* y *F*, estarian echadas sobre la linea *CD*, y se confundirian con ella : bastan, pues, dos puntos para determinar lo posicion de una linea recta. Fig. 5.

265 Infiérese de esta última proposicion, que *dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto.*

Porque si dos lineas como *AB* y *CD*, que se cortan en el punto *E*, se cortasen tambien en otro punto, como cada punto de interseccion sería comun á ambas lineas, estas dos lineas tendrian dos puntos comunes, y como la posicion de una linea recta no pende sino de dos puntos, las dos lineas tendrian comunes todos los demás puntos, y no formarian sino una sola linea recta, contra lo que hemos supuesto ; por consiguiente dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto. 5.

Sería un dislate la consecuencia que acabamos de inferir, si no se considerasen las lineas sin latitud ; porque si admitiésemos alguna latitud en las lineas, es constante que tendria alguna estension el punto donde se cortan las dos lineas, y podria por lo mismo ser dividido en otros dos puntos que serian comunes á ambas lineas.

266 Sacamos tambien de la misma proposicion (264), que

Digitized by Google

Fig. 5. que *si dos puntos como* C *y* D *de una recta están á igual distancia de otros dos* A *y* B, *cada punto de la linea* C D *estará á igual distancia de los mismos puntos* A *y* B. Así *E* está tan distante de *A* como de *B* : lo propio se dirá de otro punto qualquiera de la linea *CD.*

267 Para *trazar una linea recta de corta longitud, como si quisiésemos tirar desde el punto* A *al punto* B *una*
1. *linea recta sobre el papel*, se hace uso de una regla, aplicándola sobre los dos puntos *A* y *B*, ó muy cerca de ellos, y á distancias iguales de cada uno ; y haciendo correr una pluma ó un lapiz á lo largo de la regla, queda trazada la linea *A B.*

268 Las lineas se miden con otras lineas : pero en general *la medida comun de las lineas es la linea recta.* Medir una linea recta ó curva, ó una distancia qualquiera es buscar quantas veces dicha linea ó distancia contiene una linea recta conocida y determinada que se toma por unidad. Esta unidad es de todo punto arbitraria, por lo que es infinita la variedad de medidas de distancias, de las quales darémos á conocer algunas en la Geometría Práctica.

269 Entre todas las lineas curvas solo considerarémos en estos Elementos la *circunferencia del círculo.* Llá-
6. mase con este nombre la linea curva *ABDFA*, que traza el estremo *A* de la linea *CA*, moviéndose al rededor del punto fijo *C.*

270 A todo el espacio ó superficie que abraza la cir-

circunferencia, le llamamos *círculo*, y á las líneas que como *C A* ván desde el centro á la circunferencia, las llamamos *radios* del círculo. Del modo con que concebimos que se forma el círculo, resulta Fig.

271 1.° Que *todos los radios de un círculo son iguales entre sí.*

Porque no son otra cosa que la línea *C A*, cuyo estremo *A* traza la circunferencia, y que por consiguiente todos los puntos de la circunferencia distan igualmente del centro.

272 2.° Que para *trazar una circunferencia* ABDFA 6.
desde un centro C, no hay sino abrir un compás de manera que cojan sus dos piernas la distancia *C A*. Plantaráse la una en el punto *C*, y se le hará dár la vuelta á la otra, no apartándose la primera del punto *C*: la linea curva que la segunda pierna trazáre será la circunferencia que se pide.

273 3.° Que *las circunferencias cuyo centro está en un mismo punto, no pueden encontrarse sin confundirse en una sola circunferencia.*

Porque ó son iguales sus radios ó son desiguales. 1.° si fueren iguales los radios de ambas circunferencias, todos los puntos de cada una estarán á igual distancia del centro comun *C*: luego se confundirán en una sola las dos 7.
circunferencias. 2.° si fueren desiguales los radios de las dos circunferencias, la que tubiese el radio menor *C a* estará entera dentro de la que tubiere el radio mayor *C A*: lue-

Fig. luego no se encontrarán las dos circunferencias.

274 4.° Que *no tienen un mismo centro las circunferencias que se encuentran.*

Porque si tubieran un mismo centro, no se encontrarian en virtud de lo que acabamos de probar.

275 5.° Que *todos los diámetros de un círculo son iguales tambien entre sí.*

Porque se llama *diámetro* una linea recta, que pasando por el centro del círculo remata por ambos estremos en
6. la circunferencia, como la linea BF: luego se compone un diámetro de dos radios: luego son iguales entre sí todos los diámetros, pues lo son los radios (271).

8. 276 Las porciones BC, CF, FD &c. de la circunferencia se llaman *arcos.*

277 Una recta como CF, tirada desde el un estremo C de un arco al otro estremo F, se llama *cuerda* ó *subtensa* de dicho arco.

Como una cuerda tiene un arco en cada uno de sus lados, quando se dice de una linea que es cuerda de un arco, se entiende comunmente del arco menor.

278 Se echa de ver 1.° *que las cuerdas iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales, subtenden arcos iguales*: y recíprocamente *los arcos iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales tienen cuerdas iguales.*

8. Porque si la cuerda DG es igual á la cuerda DF, é imaginamos que se dobla la figura por la linea DA, para que DG se aplique sobre DF, es evidente, que siendo el pun-

Digitized by Google

punto *D* comun, y cayendo el punto *G* de la linea *DG* Fig.
sobre el punto *F* de la linea ó cuerda *DF*, todos los puntos del arco *DG* se han de aplicar sobre el arco *DF*: pues si alguno de dichos puntos no cayese sobre el arco *DF*, no estarian todos los puntos del arco *DF* á la misma distancia del centro *A*, que todos los puntos del arco *DG*, y por consiguiente todos los puntos de la circunferencia, á que pertenecen estos dos arcos, no estarian á la misma distancia del centro *A*, cuya consecuencia repugna con lo que probamos antes (271).

279 2.° Si en *un mismo círculo* ADBCA *ó en círcu-* 9.
los iguales, un arco AFC *fuere mayor que otro* AGD, *la cuerda* AC *del primero será tambien mayor que la cuerda* AD *del segundo.*

Imaginémos el círculo *ADBCA* doblado por el diámetro *AB*; por estar todos los puntos de ambos arcos á igual distancia del centro del círculo cuyos son, se aplicará todo el arco *AGD* sobre el arco *AFC*, y el punto *A* será comun á los dos arcos, y á las dos cuerdas *AD*, *AC*, 10.
y el punto *C*, estremo del arco mayor, estará á mayor distancia del punto *A*, que el punto *D*, estremo del arco menor, por coger, segun suponemos, el primer arco mayor porcion de la circunferencia que el otro. Pero el punto *C* es tambien estremo de la cuerda del arco mayor, y *D* es el otro estremo de la cuerda del arco menor: luego mayor distancia hay entre los dos estremos de la cuerda del arco mayor que entre los dos estremos de la cuerda del arco menor. Luego &c.

El

Digitized by Google

Fig. 280 ***El diámetro es la mas larga de todas las cuerdas.***

111. Porque el diámetro *B D* es igual á los dos radios *AC*, *AF* juntos (275): pero estos dos radios juntos son mayores que la cuerda *C F* (263), que es una linea recta tirada desde el punto *C* al punto *F*: y como probaríamos lo mismo por qualquiera punto del radio *AE*, que pasáre la cuerda *C F*, queda probado que es el diámetro la mayor de todas las cuerdas.

281 Llámanse *círculos concéntricos* los que tienen sus centros en un mismo punto. Tales son los dos círculos

7. *ABCDA*, *abdca*. Al espacio que hay entre las dos circunferencias se le llama *corona* ó *ánulo*.

282 Han convenido los Matemáticos en dividir toda circunferencia de círculo, grande ó pequeña, en 360 partes iguales que llaman *grados*: dividen el grado en 60 partes iguales que llaman *minutos*: cada minuto en 60 partes iguales que llaman *segundos*: el segundo en 60 partes iguales que llaman *terceros*: y así prosiguiendo.

La señal del grado es esta .... ^{o}
La del minuto .... $'$
La del segundo .... $''$
La del tercero .... $'''$
La del quarto .... ^{IV}

Así para espresar 3 grados, 24 minutos, y 55 segundos, escriben $3^{\circ}\ 24'\ 55''$.

Por grado no se ha de entender una cantidad absoluluta, sino solo la 360ma parte de qualquiera circunferencia grande ó pequeña. Así una circunferencia, por pequeña que sea, tiene tantos grados como otra mayor: pero los tiene menores en proporcion, del mismo modo que una cantidad, sea la que fuere, grande ó chica, tiene dos mitades, que tienen con ella la misma razon que las mitades de otra cantidad mayor con dicha cantidad. Fig.

De los Ángulos y de su medida.

283 Llamamos *ángulo* la abertura que forman una con otra dos lineas que concurren en un punto que se llama *punta* ó *vértice* del ángulo: tal es la abertura *BAC*, 12.
que forman las dos lineas *AB*, *AC*. Las dos lineas cuyo concurso forma el ángulo, se llaman los *lados* de dicho ángulo: las lineas *AB*, *AC* son los lados del ángulo *BAC*. El ángulo que acabamos de definir se llama ángulo *plano*. El ángulo se llama *rectilineo* quando sus lados son dos lineas rectas: *curvilineo*, quando son dos lineas curvas: y *mixtilineo* quando el un lado es una linea recta, y el otro una linea curva. Aquí considerarémos solo los ángulos rectilineos.

Quando tubiéremos que nombrar un ángulo, le nombrarémos con tres letras, la una de las quales estará en el vértice, y las otras dos estarán lo largo de los lados: y al nombrar estas tres letras, nombrarémos siempre en segundo lugar la que estubiere en el vértice. En virtud de esto, para nombrar el ángulo formado por las dos lineas *AB*, *AC*, 12.
diríamos el ángulo *BAC*.

Es

Digitized by Google

Fig. Es preciso practicarlo así, particularmente quando un mismo punto es vértice de muchos ángulos: porque si en este caso se nombrase alguno de ellos por sola la letra del vértice comun á todos, quedaría dudoso de qual se hace mencion.

284 Para enterarse bien de lo que es un ángulo, con-
12. viene imaginar, que la linea *A B* estaba primero echada sobre la *A C*, y que se la hace mover al rededor del punto *A* (del mismo modo que se mueve una pierna de compás al rededor de su charnela) para que llegue á la posicion *AB* en que está actualmente. La cantidad de que *A B* se ha apartado de *A C* en este movimiento, es lo que llamamos ángulo.

285 De aquí se infiere 1.° *que la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados, sí solo de la abertura, inclinacion ó distancia que hay entre dichos lados.*

12. Así el ángulo *BAC* es igual al ángulo *EAF* ó por mejor decir es el mismo ángulo, annque los dos lados *CA* y *CB* que le forman sean mas cortos que los lados *EA* y *FA*.

286 2.° *Que si dos ángulos* BAC, bac *son iguales, y se pone el vértice del uno encima del vértice del otro: de modo que el lado* a b *del uno cayga encima del lado* A E *del otro: el lado* a c *del primero caerá por precision encima del lado* A F *del segundo.*

Porque si cayera *a c* fuera ó dentro del ángnlo *BAC*, sería el ángulo *bac* mayor ó menor que el ángulo *BAC*,

y

y no serian iguales los dos ángulos, conforme se supone. Fig.

287 Se colige igualmente de la generacion del ángulo que *la medida de un ángulo* BAC, *cuyo vértice está* 12.
en el centro del círculo, *es el arco* BC *que abrazan sus lados*.

Porque es evidente que crece ó mengua dicho arco á medida que crece ó mengua el intervalo que cogen los dos lados. Pero acabamos de ver que de solo este intervalo pende la cantidad del ángulo: queda, pues, probado que se mide un ángulo, cuyo vértice está en el centro del círculo, por el arco que abrazan sus lados.

Es indiferente trazar el arco que ha de medir un ángulo á una distancia mayor ó menor del vértice. Porque sea grande ó pequeña la circunferencia cuyo centro está en el vértice del ángulo, el arco comprehendido entre los dos lados del ángulo, es de igual valor ó igual número de grados respectivo: quiero decir, que dicho arco cogerá el mismo número de grados de su círculo. Por egemplo el arco *a b* tiene tantos grados como el arco *AB*, por- 7.
que si el uno fuese la octava parte de su circunferencia, el otro será tambien la octava parte de la circunferencia, cuyo arco es.

288 Estos arcos de diferentes círculos, que cogen igual número de grados, y son cada uno la misma parte de la circunferencia á que pertenecen, se llaman *arcos proporcionales* ó *semejantes*.

289 Luego *para dividir un ángulo en muchas partes iguales*, *basta dividir el arco que le mide en otras tantas*

tas

Fig. *tas partes iguales, y tirar desde los puntos de division lineas al vértice de dicho ángulo.* Mas adelante enseñarémos como se dividen los arcos.

290. Y *para formar un ángulo igual á otro ángulo:*
12. por egemplo, *para formar en el punto* a *de la linea* a c *un ángulo igual al ángulo* BAC, es menester describir con una abertura de compás arbitraria, y desde el punto *a* como centro un arco indefinito *c b*: aplicando despues la punta del compás en el vértice *A* del ángulo dado *BAC*, se describirá con la misma abertura el arco *BC* comprehendido entre los dos lados de dicho ángulo: tomando con el compás la distancia entre *C* y *B*, y llevándola desde *c* á *b*, quedará determinado el punto *b*, por el qual, y por el punto *a*, tirando la linea *a b*, será el ángulo *b a c* igual al ángulo *BAC.*

Porque el arco *b c* es la medida del ángulo *bac* (287), y el arco *BC* mide el ángulo *BAC.* Pero estos dos arcos son iguales, porque pertenecen á círculos iguales, y tienen tambien cuerdas iguales (278): pues se ha tomado la distancia *bc* igual á la que hay desde *B* á *C.* Luego &c.

Si atendemos al número de grados que puede abrazar un ángulo, hallarémos que puede haberle de tres especies: es á saber *recto*, *obtuso* y *agudo.*

291 El *ángulo recto* es el que tiene por medida un arco de 90 grados, ó la quarta parte de la circunferen-
13. cia: tales son los ángulos *DAE*, *EAB*.

Llá-

Digitized by Google

292 Llámase *ángulo obtuso* el que tiene por medida Fig.
un arco de mas de 90 grados: tal es el ángulo *FAB*. 13.

293 El *ángulo agudo* es aquel cuya medida es un
arco que no llega á 90 grados: los ángulos *DAF*, *FAE* 13.
son agudos.

De todo esto es facil inferir 1.° *que son iguales entre sí todos los ángulos rectos*, pues todos cogen 90 grados. 2.° *que no son iguales entre sí todos los ángulos obtusos*, pues puede un ángulo obtuso pasar de 90 grados de mayor ó menor cantidad que otro. 3.° *que tampoco son iguales entre sí todos los ángulos agudos*, pues puede un ángulo agudo acercarse mas ó menos que otro al ángulo recto.

294 Llámase *complemento* de un ángulo agudo lo que se le debe añadir para que valga 90 grados. El án-
gulo *EAF* es complemento del ángulo *DAF*, porque 13.
juntos valen el ángulo recto *DAE*.

Quando el ángulo es obtuso, su complemento es lo que se le debe quitar para que dicho ángulo valga 90 grados: el complemento del ángulo *FAB* es el ángulo
FAE. 13.

295 *Suplemento* de un ángulo es el ángulo que se le debe añadir, para que forme la suma de los dos el valor
de dos ángulos rectos ó 180°: el ángulo *DAF* es suple- 13.
mento del ángulo *FAB*.

296 Como el valor de los ángulos no se distingue del valor de los arcos que los miden, quanto hemos dicho del complemento y suplemento, respecto de

Fig. aquellos, se aplica igualmente á estos.

297 Infiérese de la naturaleza del complemento y suplemento, que *los ángulos y arcos iguales tienen complementos ó suplementos iguales*: y recíprocamente, que *son iguales los ángulos ó los arcos quando tienen complementos ó suplementos iguales.*

298 El método que hemos declarado (287) para valuar un ángulo, nos autoriza para inferir 1.° *que*
12. *una linea recta* AB, *que cae sobre otra* CD, *forma con esta dos ángulos* BAC, BAD *que valen juntos* 180°.

Porque podemos considerar el punto *A* como el centro de un círculo, cuyo diámetro será *CD*: pero los dos ángulos *BAC* y *BAD* tienen por medida, *BC* y *BD*, que componen la semicircunferencia: valen, pues, juntos 180°.

14. 299 2.° Que *si desde un mismo punto* A *se tiran tantas rectas* AC, AE, AF, AD, AG *&c. quantas se quisiere, todos los ángulos juntos* BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB *que comprehenden, no pasarán de* 360°. Porque no pueden coger mas que toda la circunferencia.

300 De lo dicho (298) hemos de inferir que *todo diámetro* DB, por egemplo, *divide la circunferencia en dos partes iguales.*

14. Porque ya que los dos ángulos *DAF* y *FAB* cogen juntos un arco de 180°, cogerán la mitad de toda la circunferencia que consta de 360°.

Si

Digitized by Google

301 *Si dos lineas rectas* AC, AD *tiradas desde el estremo* A *de otra linea forman con esta dos ángulos* BAC, BAD, *cuya suma valga dos ángulos rectos, dichas dos lineas no serán sino una sola y misma linea.* Fig. 15.

Tírense desde el punto *A* á los dos puntos *E* y *F*, el uno mas arriba y el otro mas abajo de la linea *AC*, las lineas rectas *AE*, *AF*. Si las dos lineas *AC*, *AD* no formasen una sola y misma linea *DAC*, la linea *AD* prolongada ácia *C*, pasaria mas arriba ó mas abajo que la linea *AC*.

1.° Si pasase mas arriba, y fuese por egemplo la linea *DAF*; la suma de los ángulos *BAD* y *BAF* sería igual á la de dos ángulos rectos (298). Pero por lo supuesto la suma de los dos ángulos *BAD*, *BAC* es tambien igual á la de dos rectos. Luego la suma de los ángulos *BAD* y *BAF* seria igual á la de los ángulos *BAD*, *BAC*: salta á la vista que esto no puede ser.

2.° Si pasase debajo, y fuese, por egemplo, la linea *DAE*; la suma de los ángulos *BAD*, *BAE* seria igual á la de dos ángulos rectos (298). Pero por lo supuesto, la suma de los ángulos *BAD* y *BAC* es tambien igual á la de dos rectos: luego la suma de los dos ángulos *BAD* y *BAE* seria igual á la de los ángulos *BAD* y *BAC*: y como salta tambien á la vista que esto no puede ser, resulta que la linea *DA*, prolongándola, es la misma linea *AC*, y por consiguiente las dos lineas *AD* y *AC* no son sino una sola linea.

 Una

Digitized by Google

Fig. 302 Una vez que son iguales los ángulos quando son iguales sus suplementos (297), se sigue que *los*
16. *ángulos* BAC, EAD *opuestos al vértice, y formados por las dos rectas* BD *y* EC *son iguales.*

Porque *BAC* tiene por suplemento *CAD*, y *EAD* tiene tambien por suplemento *CAD*. Luego &c.

De las Perpendiculares y Obliquas.

303 Dícese de una línea recta que es *perpendicular* á otra linea recta, quando cae sobre esta sin inclinarse ni
17. al uno ni al otro lado: tal es la linea *AC* respecto de la *BD*.

304 Infiérese de aquí 1.° *que quando una linea es perpendicular á otra linea, forma con esta dos ángulos iguales y rectos* (298).

305 2.° Que *si una linea que encuentra otra, forma con ella ángulos rectos y por consiguiente iguales, es indispensablemente perpendicular á esta linea.*

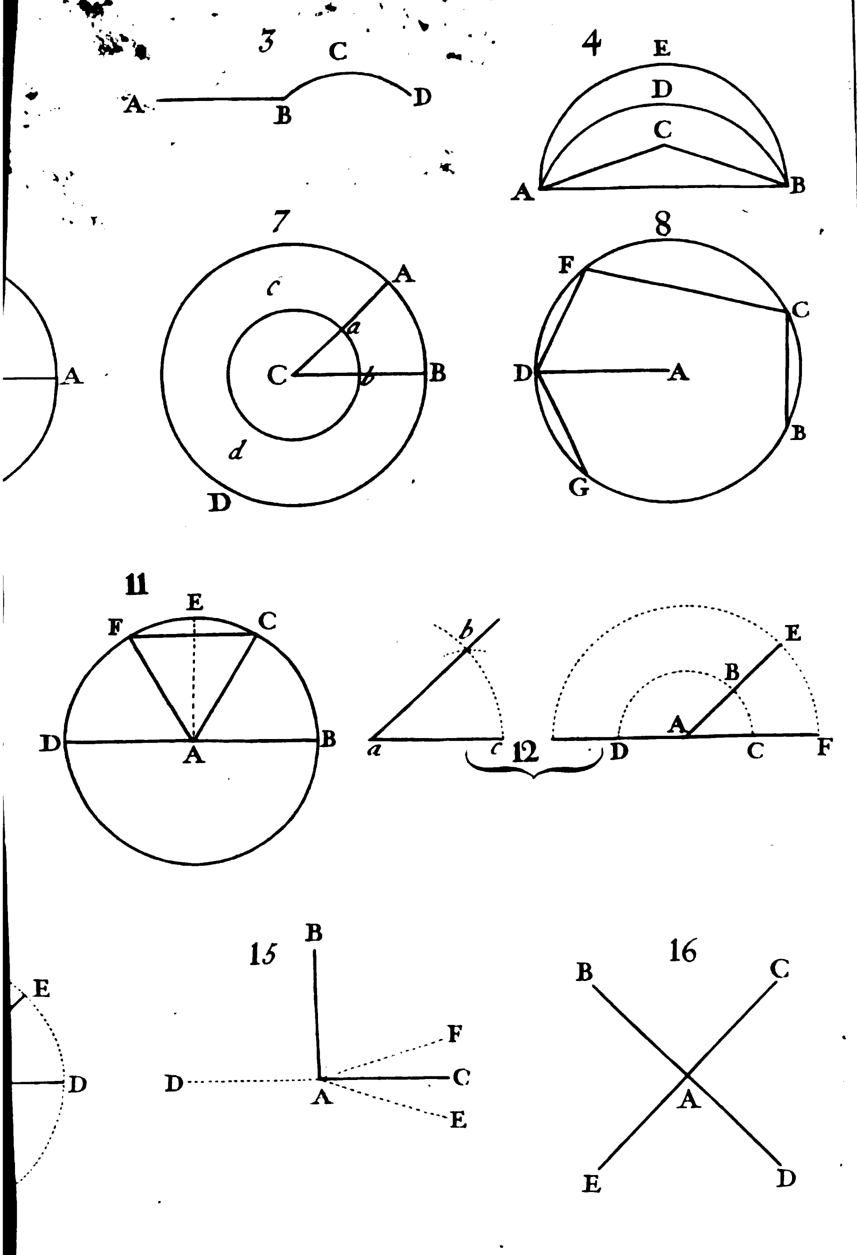
Porque si forma ángulos iguales, no se inclina ni ácia el un lado ni ácia el otro: luego será perpendicular (303).

17. 306 3.° Que *quando una linea* AE *es perpendicular á otra linea* BD, *esta es tambien perpendicular á la linea* AE.

Porque siendo *AE* perpendicular á *BD*, los ángulos *ACB*, *ACD* serán iguales: pero *ACD* es igual á *BCE* (302): luego *ACB* es igual á *BCE*: luego la linea *BC* no se inclina ni ácia *AC* ni ácia

EC:

Digitized by Google


3
4
7
8
11
12
15
16

Digitized by Google

EC: luego es perpendicular á *A B*. Fig.

307. 4.º Que *si un punto* A, *por egemplo, de una* 17.
linea AC *perpendicular á* BD, *está igualmente distante de los puntos* B *y* D, *todos los demás puntos de la linea* AC *están tambien igualmente distantes de* B *y* D.

Porque si el punto *F*, por egemplo, ú otro qualquiera punto de la perpendicular, no estubiese á igual distancia de *B* y *D*, es evidente que se inclinaria la linea *AC* ácia algun lado, y por lo mismo no seria perpendicular á *BD*, contra lo que suponemos. Lo que acabamos de probar respecto del punto *A*, se probaria del mismo modo respecto del punto *E*, y de otro qualquiera punto de la perpendicular.

308. 5.ª Que *desde un punto* C, *fuera de una linea* AB, *no se puede tirar mas de una perpendicular* CD *á dicha* 18.
linea.

Para probarlo tomarémos en la *AB* dos puntos *A* y *B* igualmente distantes de *C*. Sentado esto, ya que la linea *CD* es perpendicular á *AB*, y su punto *C* está á igual distancia de *A* y *B*, todos los demás puntos de esta perpendicular han de estar á igual distancia de *A* que de *B* (307): luego está el punto *D* igualmente distante de *A* y *B*. Pero de esto se infiere que ninguna otra linea, qual seria *CF*, tirada desde el punto *C*, puede ser perpendicular á *AB*: porque si *CF*, por egemplo, fuese perpendicular á *AB*, por estar su punto *C* á igual distancia de *A* y *B*, todos sus demás puntos lo estarian tam-

Digitized by Google

Fig. bien (307). Pero el punto *F* no está á igual distancia de *A* y *B*, porque ya que lo está el punto *D*, el punto *F* que está entre *D* y *B*, estará mas cerca de *B* que de *A*. Luego la linea *CF* no es perpendicular á *AB*. Lo propio probarémos respecto de otra linea qualquiera tirada desde el punto *C*, distinta de la linea *C D*.

309 Del mismo modo probaríamos que *desde un punto* D *que está en la misma linea* A B, *no se la puede levantar mas de una perpendicular.*

El razonamiento sería de todo punto el mismo, sin mas diferencia que la de tomar en la linea *A B* dos puntos *A* y *B* á iguales distancias del punto *D*, del mismo modo que en la proposicion antecedente tomamos *A* y *B* á iguales distancias del punto *C*.

310 Infiérese de esta proposicion *que dos lineas perpendiculares á otra, jamás se pueden encontrar, aunque se prolongasen infinitamente.*

Porque si dichas perpendiculares se encontrasen, desde su punto de concurso habria dos perpendiculares tiradas á la otra linea, y esto no puede ser, segun acabamos de demostrar.

311 Dícese de una linea que es *obliqua* respecto de otra, quando se inclina ácia algun lado: tal es la linea
19. *F K* respecto de la *GH*. De donde podrémos inferir

312 1.° Que *una linea obliqua respecto de otra, forma con esta dos ángulos desiguales, que son suplemento el uno del otro* (295.).

2.°

Digitized by Google

313 2.° Que *si una linea que encuentra otra, forma con ella dos ángulos desiguales, será obliqua respecto de ella,* pues por razon de formar los dos ángulos desiguales, se inclina mas ácia el un lado que ácia el otro. Fig.

314 *Si desde un mismo punto* C *se tiran á la linea* AB *la perpendicular* CD, *y la obliqua* CF, *será la perpendicular* CD *mas corta que la obliqua* CF. 18.

Prolónguese *CD* hasta *H*, de suerte que sea *HD* igual á *CD*, y tírese la obliqua *HF*. Esta obliqua *HF* será necesariamente igual á la otra obliqua *CF*: porque ya que la *CH* es perpendicular á la *AB*: esta *AB* será tambien perpendicular á la *CH* (306). Pero su punto *D* está á igual distancia de los dos puntos *C* y *H*, por ser *HD* igual á *CD*: por consiguiente otro qualquiera punto *F*, por egemplo, de la perpendicular *AB* (307), está tan distante de *C* como de *H*: luego *HF* es igual á *CF*.

Sentado esto, la linea *CDH* es mas corta que la línea *CFH* (263): luego la mitad de *CDH* es mas corta que la mitad de *CFH*: pero la mitad de *CDH* es *CD*, y la mitad de *CFH* es *CF*: luego la perpendicular *CD* es mas corta que la obliqua *CF*.

315 De esta última proposicion se infiere lo que digimos antes (263): es á saber que *es la perpendicular la linea mas corta que desde un punto se la puede tirar á otra linea*, y que por lo mismo es la *linea perpendicular la medida exacta de la distancia que hubiere entre dos puntos.*

316 *Entre todas las obliquas* CF, CG *y* CE *que* 18.

Digitized by Google

Fig. *desde un punto* C *se la pueden tirar á una linea* A B, *la obliqua* C G *mas distante de la perpendicular* C D *será la mas larga, y las que se tiraren á distancias iguales de la perpendicular, serán iguales entre sí, y recíprocamente.*

1.° Para probar que la obliqua *CG* es mas larga que la obliqua *CF*, prolónguese la perpendicular *CD* hasta el punto *H*, de modo que *HD* sea igual á *CD*, y desde el punto *H* tírense las lineas *HF* y *HG*: será facil probar, como antes (314), que estas dos lineas son iguales respectivamente á las obliquas *CF* y *CG*, asi *CF* es la mitad de *CFH*, y *CG* la mitad de *CGH*. Pero es evidente que *CGH* es mas larga que *CFH*, porque se aparta mas del camino mas corto que es *CDH* (263): luego la obliqua *CG* es tambien mas larga que la obliqua *CF*.

2.° Las obliquas *CF* y *CE* igualmente distantes de la perpendicular, son iguales entre sí: porque tirando la *HE* es evidente que las dos lineas *CFH* y *CEH* son iguales, pues se apartan igualmente de la linea recta *CDH*: por consiguiente sus mitades *CF* y *CE* son tambien iguales. La recíproca se demostraría del mismo modo.

317 De donde resulta que *desde un mismo punto* C *no se la pueden tirar á una linea mas de dos lineas iguales*, porque no se pueden tirar mas de dos obliquas igualmente distantes de la perpendicular.

318 De lo que hemos dicho en órden á las perpendiculares y á las obliquas, se ha de inferir *que hay tres*
17. *señales para conocer si una linea* AC *es perpendicular á*

otra

otra BD. 1.° quando *A C* forma con *B D* dos ángulos rectos y por consiguiente iguales (305). 2.° quando tiene dos de sus puntos á igual distancia cada uno de dos puntos de la segunda linea (307 y 264). 3.° quando es la mas corta que desde un punto dado se la pueda tirar á la otra linea (315). Fig.

319 Ya es facil, despues de lo dicho hasta aquí, percibir lo que se deberá practicar para *levantar una perpendicular en medio de una linea* AB. 20.

Se ha de poner una punta del compás en *B*, y con una abertura mayor que la mitad de *AB* se trazará un arco *JK*: se plantará despues la punta del compás en *A*, y con la misma abertura se trazará un arco *LM*, que corte el primero en el punto *C* que estará á igual distancia de *A* que de *B*. Por el mismo método se determinará otro punto *D*, usando de la misma ú otra abertura de compás. Finalmente por los dos puntos *C* y *D* se tirará la linea *CD* que será perpendicular en medio de *AB*. Porque por el modo con que tiramos la *CD*, consta que sus dos puntos *C* y *D* están ambos á igual distancia de *A* que de *B*, por consiguiente la *C D* no se inclina ni al uno ni al otro lado respecto de *A B* (318).

320 Si *desde un punto* E *fuera de la linea* A B *se quiere tirar una perpendicular á dicha linea*, se plantará la punta del compás en *E*, y con una abertura mayor que la mas corta distancia entre el punto *E* y la linea *A B*, se trazarán con la otra punta dos arcos que corten *A B* 21.

en

Digitized by Google

Fig. en los puntos *C* y *D*: desde estos puntos como centros, y con una abertura de compás mayor que la mitad de *CD*, se trazarán succesivamente dos arcos que se corten en un punto *F*, por el qual y por el punto *E* se tirará la linea *FE*, que será perpendicular á *AB* (318), pues tendrá dos puntos *E* y *F* igualmente distantes cada uno de los dos puntos *C* y *D* de la linea *AB*.

321 Si el punto *E* por el qual se quiere que pase
22. la perpendicular, estubiera en la misma linea *AB*, se practicaría lo propio.

Finalmente, si estubiese en tal situacion el punto *E*, que no se pudiese señalar cómodamente, sino uno de los
23. dos puntos *C* ó *D*, se prolongaría la linea *AB*, y se prac-
24. ticaría la misma operacion. La figura 24 es para quando se quiere levantar una perpendicular en el estremo de la linea *AB*.

De las Paralelas.

322 Dos lineas rectas trazadas sobre un mismo plano son *paralelas* quando están en todos sus puntos á igual distancia la una de la otra, ó lo que es lo mismo, quando siguen tal direccion, que todos los puntos de la una están
25. igualmente distantes de la otra. Las lineas *AB* y *CD* son paralelas. De aqui se puede inferir

323 1.° Que *las paralelas, aun quando se las prolongase infinitamente, no se pueden encontrar*, pues han de estar por su naturaleza siempre á la misma distancia la una de la otra.

2.°

Digitized by Google

324 2.° Que *las lineas* EF, GH *tiradas desde la* F. 25.
una paralela perpendicularmente á la otra, son iguales, pues estas perpendiculares miden la distancia que hay entre las dos paralelas (315), cuya distancia es siempre una misma (322).

325 3.° Que *si dos lineas fueren paralelas, otra linea que fuere paralela á la una, será tambien paralela á la otra.*

Porque la tercera linea no puede estar en todos sus puntos á igual distancia de la una de las dos paralelas, sin estar tambien en todos sus puntos á igual distancia de la otra paralela.

326 Sin embargo de lo que acabamos de decir de las lineas paralelas, suelen considerarlas algunas veces los Matemáticos como lineas que se encontrarian prolongadas al infinito. Porque aunque estén separadas por algun intervalo determinado, y por consiguiente limitado dos lineas cuya longitud se supone infinita, dicho intervalo se puede considerar como ninguno respecto de la infinita longitud de dichas lineas. Por lo que *dos lineas que solo se encuentran prolongadas al infinito, y dos lineas paralelas, son una misma cosa*: como tambien podemos considerar recíprocamente *dos lineas paralelas como dos lineas que se encontrarian prolongadas al infinito.* En el discurso de esta obra se nos proporcionarán ocasiones de manifestar quan util y exacto es este modo de considerar las paralelas.

327 *Dos lineas paralelas como* AB *y* CD, *corta-* 26.
das

Fig. *das por otra linea* EF, *que se llama* secante; *están igualmente inclinadas ácia un mismo punto* E *de la secante.*

Porque si las dos paralelas *AB* y *CD* no estubiesen igualmente inclinadas respecto de *EF* ácia el punto *E*, de modo que la paralela inferior, por egemplo, estubiese mas inclinada que la superior ácia el mismo punto, dichas dos lineas se irian arrimando la una á la otra, y por consiguiente no serian paralelas, contra lo supuesto.

328 Forma toda secante con las paralelas varios ángulos en que hemos de parar la consideracion. Los unos están entre las paralelas, y se llaman *internos*: tales son

26. los ángulos *J*, *K*, *L*, *M*. Los otros están fuera de las paralelas, y se llaman *esternos*: tales son los ángulos *G* y *N* en la parte de arriba, y *P* y *H* en la de abajo. Quando se comparan de dos en dos los ángulos ya internos, ya esternos, se llaman *alternos* aquellos que están á distintos lados de la secante, el uno á la derecha y el otro á la izquierda, el uno arriba y el otro abajo: los ángulos *J* y *M* son *alternos internos*, y tambien los dos *L* y *K*. Los dos ángulos *N* y *P* son *alternos esternos*, y lo son tambien los dos *G* y *H*.

329 *Los dos ángulos que forman las paralelas á un mismo lado de la secante, el uno esterior y el otro interior, como los ángulos* M *y* N, *son iguales.*

Porque una vez que la cantidad de un ángulo pende de la inclinacion de las dos lineas que le forman (285), y las dos paralelas están igualmente inclinadas respecto de

la

la secante *EF* (327), se sigue que los ángulos *M* y *N* que forman las paralelas con *EF*, son iguales. Por lo mismo el ángulo esterior *H*, y el ángulo interior *K*, que están debajo de las paralelas, á un mismo lado de la secante, son tambien iguales. Del mismo modo probaríamos que son tambien iguales entre sí los ángulos *G* y *L* del otro lado de la secante, y tambien los ángulos *P* y *J*. De aqui inferirémos las quatro proposiciones siguientes. Fig.

330 1.° *Los ángulos alternos internos* AGH, DHE *son iguales.* 27.

Porque acabamos de probar (329) que *AGH* es igual á *CHF*; pero *CHF* es igual (302) á *DHE*: luego *AGH* es igual á *DHE*.

331 2.° *Los ángulos alternos esternos* BGE, CHF *son iguales.*

Porque *BGE* es igual á *AGH* (302): pero hemos visto (329) que *AGH* es igual á *CHF*: luego *BGE* es igual á *CHF*.

332 3.° *Los ángulos* BGH, DHG *son suplemento el uno del otro*: porque *BGH* es suplemento de *BGE*, que es igual (329) á *DHG*.

333 4.° *Los ángulos* BGE, DHF, *ó* AGE, CHF *son suplementos el uno del otro*: porque *DHF* tiene por suplemento *DHG*, que es igual (329) á *BGE*.

334 Todas estas propiedades se verifican quando dos lineas paralelas son cortadas por otra linea: y recíprocamente todas las veces que una linea recta cortare otras dos li-

Digitized by Google

Fig. lineas rectas, de modo que se verifique alguna de estas propiedades, se podrá inferir, que las dos cortadas son paralelas: esto se demuestra del mismo modo sin variar en nada.

335 De las propiedades que acabamos de demostrar

28. podemos inferir 1.° *que si dos ángulos* ABC, DEF, *vueltos ácia un mismo lado, tienen sus lados paralelos, son iguales.*

Porque si imaginamos el lado *DE* prolongado hasta encontrar *BC* en *G*, los ángulos *ABC*, *DGC* serán iguales (329), y por la misma razon el ángulo *DGC* será igual al ángulo *DEF*: luego *ABC* es igual á *DEF*.

25. 336 2.° Que *si la linea* GH *es perpendicular á las otras dos* AB, CD, *estas dos lineas son paralelas.*

Porque una vez que *GH* es perpendicular á *AB* y á *CD*, los ángulos alternos internos *GHD*, *HGE* por ser rectos serán iguales: luego las lineas *AB* y *CD* son paralelas.

29. 337 3.° Que *para tirar por un punto dado* C *una linea* CD *paralela á una linea* AB, es menester tirar á arbitrio por el punto *C* la linea indefinita *CEF*, que corta *AB* en un punto qualquiera *E*: despues se tirará por el punto *C* la linea *CD*, que forme con *CE* (290) el ángulo *ECD* igual al ángulo *FEB* que esta forma con *AB*: la linea *CD* tirada por este método, será paralela á *AB* (334).

30. 338 4.° Que *si dos lineas* CD, EF *fueren perpendiculares á otra linea* AB, *serán paralelas entre sí.*

Por-

Digitized by Google

Porque los ángulos en *C* y *E* serán rectos: luego será el ángulo *DCE* suplemento del ángulo *FEC*: luego serán dichas lineas paralelas entre sí (332). Fig.

339 5.° Que *si* CD *y* EF *fueren paralelas, y fuese la una de ellas, pongo por caso* CD, *perpendicular á* AB, *lo será tambien* EF.

Porque los ángulos *DCE*, *FEC* son suplemento el uno del otro (332), una vez que suponemos ser *CD* y *EF* paralelas entre sí: luego será el ángulo *FEC* recto, pues suponemos que lo es el ángulo *DCE*: luego será tambien *FE* perpendicular á la *AB*.

De las Lineas rectas consideradas en el círculo.

340 Llámase en general *secante* del círculo toda linea como *DE*, que encuentra el círculo en dos puntos, y está en parte fuera del círculo. 31.

341 Llamamos *tangente* una linea *AD*, que toca la circunferencia sin cortarla, aunque se prolongue. 31.

342 *Toda recta* FG, *que corta la circunferencia en dos puntos* A *y* B, *es secante del círculo.* 32.

Tírense á los puntos *A* y *B*, donde la recta *FG* encuentra la circunferencia, los dos radios *CA*, *CB*. Por ser iguales estos dos radios entre sí, no pueden ser ambos perpendiculares á la recta *FG* (308), y estarán á igual distancia cada uno de la perpendicular tirada desde el centro *C* (316): y así la perpendicular *CD* tirada desde el centro caerá en medio de *AB*. Pero esta perpen-

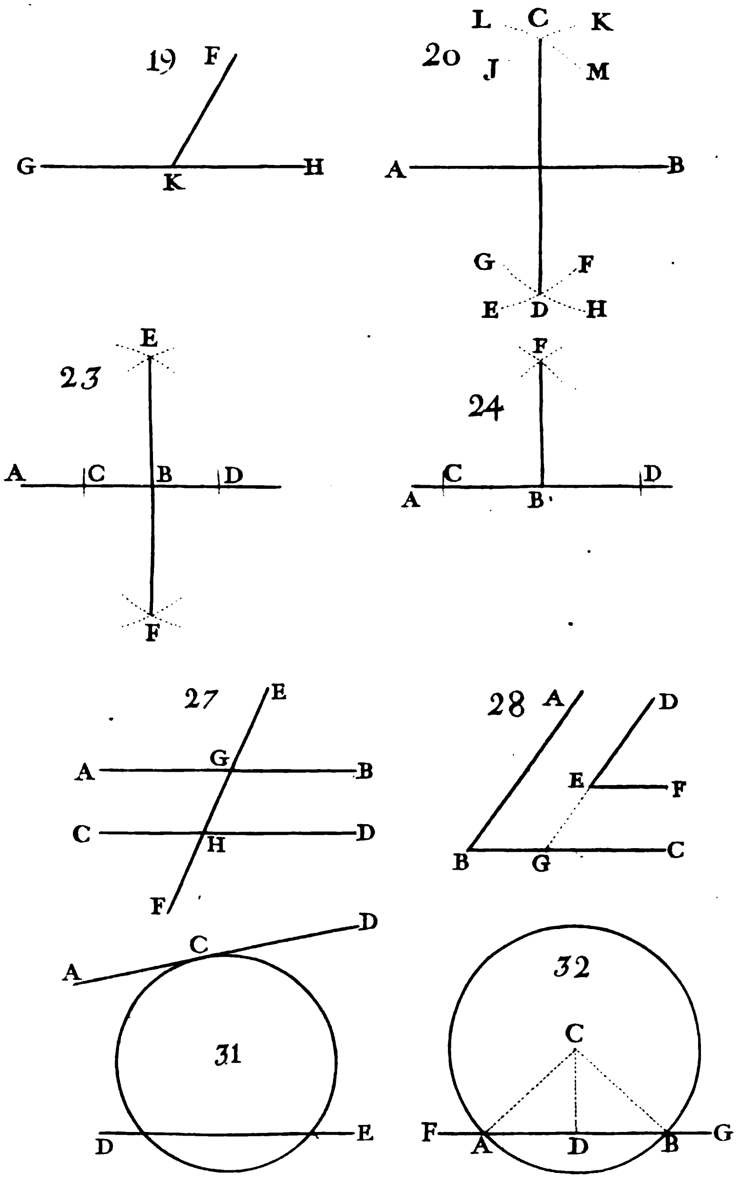
Fig. pendicular *CD* es menor que el radio *CA* ó *CB*, y son tambien mas cortas que estos radios todas las rectas tiradas desde el centro *C* á qualquiera de los puntos que están entre *A* y *B* (316): luego todos los puntos de la recta *AB* están dentro del círculo. Como son mas largas las obliquas tiradas desde un mismo punto *C* á la recta *FG*, conforme distan mas de la perpendicular *CD* (316), resulta que si están en la circunferencia los puntos *A* y *B*, estarán fuera de ella los puntos de la recta *FG* que estubiesen entre *A* y *F* ó entre *B* y *G*: luego será la recta *FG* secante del círculo (340).

343 Luego *no encuentra la tangente la circunferencia del círculo, sino en solo un punto*: porque si le encontrára en dos, seria secante (342).

344 *Toda linea perpendicular al estremo de un radio es tangente del círculo.* Quedará probado si probamos que toda perpendicular al estremo del radio no toca la circunferencia sino en solo un punto.

33. 345 Sea, pues, la linea *ABD* perpendicular al estremo del radio *CB*: hemos de probar que no toca el círculo sino en solo el punto *B*. Es constante que si tiramos las dos lineas *CE*, *CF*, serán obliquas á la linea *ABD* (308) por ser tiradas desde el mismo punto que el radio perpendicular *CB*: luego serán estas obliquas mas largas que el radio perpendicular: tienen por consiguiente sus estremos *E* y *F* fuera del círculo y de la circunferencia. Lo propio demostrarémos respecto de otro punto qualquiera

Digitized by Google



Digitized by Google

ra de la circunferencia distinto de *B*, y por consiguiente Fig.
la linea *ABD* no toca la circunferencia sino en el punto *B*: luego es tangente.

346 Y recíprocamente *toda tangente es perpendicular al radio que remata en el punto de contacto.*

Porque si la tangente *ABD* toca el círculo en el 33.
punto *B*, donde remata el radio *CB*, es evidente que pues la tangente no corta la circunferencia, no entra en el círculo, y por consiguiente es imposible tirar desde el centro á la tangente una linea mas corta que el radio *CB*: luego este radio es perpendicular (315) á la tangente, y recíprocamente la tangente es perpendicular al radio (306).

347 Luego por *un mismo punto de la circunferencia no se puede tirar mas de una tangente.*

Porque toda tangente es perpendicular (346) al estremo del radio tirado al punto de contacto: pero por el estremo del radio no puede pasar mas que una perpendicular á dicho radio (309): por consiguiente es imposible tirar dos tangentes á un mismo punto de la circunferencia.

348 Luego tambien *para tirar una tangente al círculo por un punto dado* B, *no hay sino tirar á dicho punto* 33.
un radio C B, *á cuyo estremo* B *se tirará una perpendicular*, practicando lo dicho antes (321).

349 *Una perpendicular* E P, *tirada desde el centro* 34.
E *de un círculo á una cuerda* F M, *la divide en dos partes iguales.*

P Por-

Fig. Porque ya que la linea *E P* sale del centro del círculo, tiene un punto *E* igualmente distante de los estremos *F* y *M* de la cuerda: y como á mas de esto es perpendicular á la cuerda, todos sus demas puntos están (307) á igual distancia de los mismos estremos *F* y *M*: luego el punto *J* está tambien á igual distancia de *F* que de *M*: luego será *J* el medio de la cuerda.

34. 350 Y recíprocamente *toda recta* E P, *que pasando por el centro* E *de un círculo, divide en dos partes iguales una cuerda* F M, *es perpendicular á esta cuerda.*

Porque si *E P* divide por el medio la cuerda en el punto *J*, tiene este punto *J* á igual distancia de los estremos *F* y *M*, y como pasa tambien por el centro *E* tiene tambien un punto *E* á igual distancia de *F* y *M*: luego es *E P* una recta que tiene dos puntos *J*, *E* á igual distancia de los puntos *F*, *M* de la cuerda *F M*: luego (318) *E P* es perpendicular á *F M*.

351 *Si una recta* E P, *perpendicular á una cuerda*

34. F M, *la divide por el medio, pasa por el centro del círculo.*

Porque una vez que divide la cuerda por el medio, tiene un punto *J* igualmente distante de *F* que de *M*: y como es perpendicular, todos sus demás puntos han de estar tambien á igual distancia de los estremos *F* y *M* (307): pero el centro *E* es un punto igualmente distante del estremo *F* que del estremo *M* (271): luego el centro *E* es uno de los puntos por donde pasa la perpendicular.

35. 352 *Una recta* E P, *que tirada desde el centro* E

di-

Digitized by Google

divide en dos partes iguales una cuerda FM, *divide tambien* Fig.
en dos arcos iguales el arco FPM, *que subtende dicha cuerda, y por consiguiente el ángulo* FEM *que este arco mide.*

Porque esta recta es, segun hemos probado (350) perpendicular á la cuerda *FM*, y tiene todos sus puntos á igual distancia de los estremos *F* y *M* de la cuerda: luego está tambien el punto *P* á igual distancia de *F* que de *M*. Luego si se tiran las *PM*, *FP* serán estas lineas dos cuerdas iguales, y por consiguiente el arco *PRM* será igual (278) al arco *PNF*: luego el arco *FPM*, y el ángulo *FEM* están divididos en dos partes iguales por el radio *EP*.

353 *Dos cuerdas paralelas* AB, CD *interceptan en-* 36.
tre sí arcos iguales AC, BD.

Porque bajando desde el centro *G* á la *AB* la perpendicular G*J*, esta perpendicular dividirá en dos partes iguales (349 y 352) cada uno de los dos arcos *AJB*, *CJD*, pues será á un tiempo perpendicular á *AB*, y á su paralela *CD* (339): luego si de los arcos iguales *AJ*, *BJ* se quitan los arcos iguales *CJ*, *DJ*, los arcos restantes *AC*, *BD* han de ser iguales.

354 *Si una cuerda* CD, *y una tangente* HK *fuesen* 36.
paralelas entre sí, los arcos JD, JC *que incluyen, serán iguales.*

Porque si la linea *GJ* pasa por el centro y remata en el punto de contacto *J*, será indispensablemente perpendicular á la tangente (346): será por consiguiente

 per-

Fig. perpendicular á la paralela *CD* (339): luego yá que esta paralela *CD* es una cuerda, el arco *CJD* que subtende, está dividido en dos partes iguales (349 y 352) en el punto *J*.

Luego quando una tangente *HK* es paralela á una cuerda *CD*, el punto de contacto *J* está en medio del arco que dicha cuerda subtende.

37. 355 *Entre todas las rectas* AB, AD, AE *que se*
38. *pueden tirar á la circunferencia de un círculo, desde un*
39. *punto* A, *que no es su centro, ora esté el punto* A *en la misma circunferencia, ora esté dentro, ora esté fuera:*

1.° *La recta* AB, *que pasa por el centro, es la mas larga.*

2.° *De las dos rectas* AD, AE, *que no pasan por el centro, la que tiene su estremo* D *mas inmediato al punto* B *de la que pasa por el centro, es la mas larga.*

Tírense los radios *CD*, *CE* á los estremos de las rectas *AD*, *AE* que no pasan por el centro.

Tendrémos 1.° *CB* igual á *CD* (271): añadiendo á cada una de estas lineas la parte *AC*, tendrémos la linea *AB* igual á la suma de las dos *AC* y *CD*: pero (263) las dos lineas *AC* y *CD* juntas son mayores que la linea *AD*: luego tambien *AB* será mayor que *AD*. Del mismo modo probaríamos que *AB* es mayor que *AE*: esto es que la recta *AB* que pasa por el centro es mas larga que otra qualquiera linea *AD* ó *AE* tirada desde el punto *A* á la circunferencia.

2.° Las dos lineas *CO* y *OD* juntas son mayores

que

Digitized by Google

que la linea *CD* (263): pero *CE* es igual á *CD* (271): luego las dos lineas *CO* y *OD* son mayores que *CE*. Si de la *CE* quitamos *OC*, y la quitamos tambien de la suma de *CO* y *OD*, la recta *OD* será mayor que la recta *OE*. Añadiendo á cada una de estas cantidades la linea *AO*, tendrémos la suma de *AO* y *OD*, esto es la linea *AD* mayor que la suma de *AO* y *OE*. Pero *AO* y *OE* juntas son mayores que *AE*: luego será *AD* con mas razon mayor que *AE*. Luego &c. Fig.

356 Tambien probarémos recíprocamente 1.° *que si una recta* AB *tirada desde un punto* A, *otro que el centro, á la circunferencia, fuere la mas larga de quantas se pudieren tirar desde dicho punto* A *á la circunferencia; pasará por el centro.* 37. 38. 39.

2.° *Que si ninguna de dos rectas desiguales* AD, AE *pasare por el centro* C *del círculo, la mas larga* AD *tendrá su estremo* D *mas inmediato al estremo* B *de la que pasare por el centro.*

1.° Ya que segun acabamos de probar, una recta que no pasa por el centro no es la mas larga de todas las lineas que desde un punto *A*, otro que el centro, se pueden tirar á la circunferencia; es evidente que una recta *AB* pasará por el centro *C* del círculo, si fuere la mas larga de quantas lineas se pudieren tirar desde el punto *A* á la circunferencia.

2.° La mas larga de las dos rectas *AD*, *AE*, tiradas desde un punto *A*, otro que el centro, á la circun-

Digitized by Google

Fig. ferencia; ha de tener su estremo mas inmediato al estremo *B* de la que pasa por el centro: porque á no ser así, la linea cuyo estremo está mas inmediato al estremo *B* de la recta que pasa por el centro, no sería la mas larga, cuya consecuencia no puede concordar con lo que hemos probado poco ha (355). De todo esto resulta

40. 357 1.° Que *quando dos rectas* A D, A G, *tira-*
41. *das desde un punto* A, *otro que el centro, á la circunferen-*
42. *cia, son iguales; sus estremos* D, G *están á igual distancia del estremo* B *de la recta* AB, *que pasa por el centro, y que por lo mismo serán iguales los dos arcos* BD, BG.

Porque si los estremos de las rectas *AD*, *AG* no estubiesen á igual distancia del estremo *B* de la recta que pasa por el centro, no serian iguales (355).

358 Y recíprocamente *dos rectas* AD, AG, *tiradas desde un mismo punto* A, *otro que el centro, á la circunferencia, son iguales, quando sus estremos están á igual distancia cada uno del estremo* B *de la recta que pasa por el centro.*

Porque si dichas rectas *AD*, *AG* no fuesen iguales, hemos visto (356) que estarian sus estremos á distancias desiguales del punto *B*.

37. 359 2.° Que *es imposible tirar desde un punto* A,
38. *que no sea el centro de un círculo, tres lineas iguales á la*
39. *circunferencia.*

Porque dos de ellas habrían de estar á un mismo lado respecto de la recta *AB*, que pasa por el centro: y es-

esto no puede ser, porque las rectas *AD*, *AE*, tiradas Fig.
á un mismo lado respecto de la recta que pasa por el centro, 37.
tendrian sus estremos á distancias desiguales del estre- 38.
mo de la que pasa por el centro, y serian por lo mismo 39.
desiguales (355).

Por lo que, tres puntos de una misma circunferencia no pueden estar á igual distancia de un mismo punto *A*, otro que el centro; ni es posible que tres puntos de una misma circunferencia, cuyo centro fuese el punto *C*, sean de otra circunferencia cuyo centro fuese el punto *A*.

Luego *dos circunferencias* FBDF, EBDE *no se pue-* 43.
den encontrar en tres puntos sin confundirse.

360 *Entre quantas rectas que desde un punto* A, *otro* 37.
que el centro, se pueden tirar á la circunferencia, la linea AM 39.
que prolongada pasaria por el centro C, *es la mas corta.*

Probarémos que es la recta *AM* la mas corta, si probamos que otra recta qualquiera *AN* tirada desde el punto *A* á la circunferencia, y cuya prolongacion no pasaría por el centro, sería mas larga que *AM.* A cuyo fin tírese el radio *CN.*

Si está el punto *A* dentro del círculo, las lineas *NA*, 37.
AC juntas serán mas largas que la linea *NC* (263); pero *NC* es igual á *MC*: luego la suma de las lineas *NA* y *AC* será mayor que *MC*: si de una y otra cantidad se restare la misma linea *AC*, la resta *NA* será mayor que la resta *MA.*

Si estubiese el punto *A* fuera del círculo, será la su- 39.

Digitized by Google

Fig. ma de las dos líneas *AN*, *NC* mayor que la línea *AC*; y restando por una parte el radio *NC*, y por la otra el radio *MC*, será la resta *AN* mayor que la resta *AM*.

Y recíprocamente, *si la recta* AM *fuese la mas corta entre quantas lineas se pueden tirar desde un mismo punto* A *á la circunferencia, dicha recta prolongada pasará por el centro* C.

Porque acabamos de probar que si no pasase su prolongacion por el centro *C*, no seria la línea mas corta.

361 *Dos circunferencias excéntricas, esto es que no tienen un mismo centro, que se cortan mutuamente, no pueden encontrarse sino en dos puntos.*

Porque no pueden dos circunferencias encontrarse en tres puntos (359) sin confundirse una con otra. Luego si se cortan no pueden encontrarse sino en dos puntos.

362 Y recíprocamente *dos circunferencias que se en-*
43. *cuentran en dos puntos* B *y* D, *se cortan mutuamente.*

Tírense desde el punto *A*, centro del uno de los círculos, los radios *AB*, *AD* á los puntos donde se encuentran las dos circunferencias. Por ser iguales las dos rectas *AB*, *AD*, ninguna de ellas pasará por el centro *C* del otro círculo *BGDE*, y rematarán ambas en los puntos *B* y *D* equidistantes del estremo *E* de la recta *AE* que pasa por el centro *C* de dicho círculo (357). Concibamos que desde el mismo punto *A* se tiran infinitas líneas rectas á la circunferencia del círculo *BGDE*: las rectas que remataren en el arco *BGD*, serán mas cortas que los radios

dios *AB*, *AD* (355), y las rectas que remataren Fig.
en el arco *BED*, serán mas largas que los mismos radios *AB*, *AD* (355). Luego está el arco *BGD* dentro, y el arco *BED* fuera del círculo *FBDF*; por consiguiente los dos círculos *FBDF*, *BGDEB*, cuyas circunferencias se encuentran en dos puntos, se cortan mutuamente.

363 Luego 1.° *Dos circunferencias que se tocan interior ó esteriormente, no se encuentran mas que en un pun-* 44.
to E : porque si se encontráran en mas puntos, se cortarian. 45.

364 2.° *Si dos círculos* X *y* Z *se tocan interior ó es-* 44.
teriormente, la recta AE *tirada desde el centro* A *del uno* 45.
al punto de contacto E, *pasará prolongada por el centro* C *del otro círculo.*

Porque siempre será *AE* la mas corta entre quantas rectas se pueden tirar desde el punto *A* al círculo *Z*.

365 Luego *quando dos círculos se tocan, sus centros y el punto de contacto están en una misma linea recta; y por consiguiente si dos círculos se tocaren interior ó esteriormente, una linea recta tirada desde el centro del uno al centro del otro pasará por el punto de contacto.*

366 Ya que el centro, el medio del arco, y el medio de la cuerda, están todos en una misma linea recta (349, 351 y 352), se podrá inferir que *qualquiera linea que pasare por dos de dichos tres puntos, pasa por el tercero.*

Y como no se puede tirar mas de una perpendicular, al

Digitized by Google

Fig. al medio de la cuerda, se debe tambien inferir, que *si una perpendicular á una cuerda pasa por uno qualquiera de dichos tres puntos, pasará indefectiblemente por los otros dos.* De estas propiedades podemos sacar

367 1.° Un método para *dividir un ángulo ó un*
46. *arco en dos partes iguales, pongo por caso el ángulo* BAC.

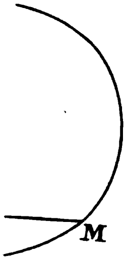
Desde su vértice como centro, y con un radio arbitrario, se describirá el arco *DE*: desde los puntos *D* y *E*, tomándolos succesivamente por centros, y con un mismo radio, se trazarán dos arcos que se corten en un punto *G*, por el qual y por el punto *A* se tirará *AG*, que por ser perpendicular en medio de la cuerda *DE* (318), dividirá en dos partes iguales el arco *DJE* (349 y 352), y por consiguiente el ángulo *BAC*, porque los dos ángulos parciales *BAG*, *EAG* tienen por medida (287) los dos arcos *DJ* y *EJ*.

368 2.° Un método para *hacer que pase por tres*
47. *puntos dados* A, B, C, *que no están en linea recta, una circunferencia de círculo.*

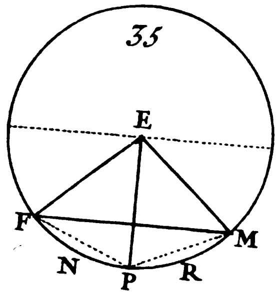
Se tirarán las lineas rectas *AB*, *BC*, que serán dos cuerdas del círculo que se quiere trazar. Se levantará una perpendicular (319) en medio de *AB*: se levantará otra en medio de *BC*: el punto *J* donde estas dos perpendiculares se cortaren, será el centro del círculo. Porque este centro ha de estar en la linea *DH* (351), y por lo mismo ha de estar en la linea *FG*: luego ha de estar en un punto comun á ambas lineas; y como no hay otro

que

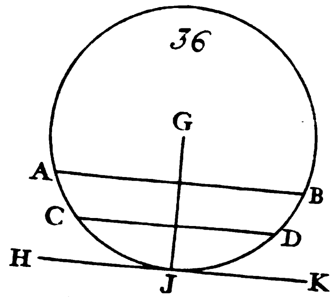
Digitized by Google

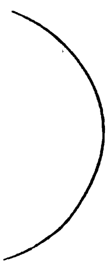


35

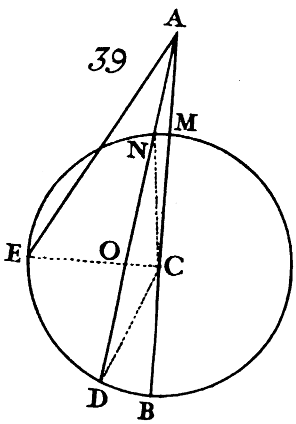


36

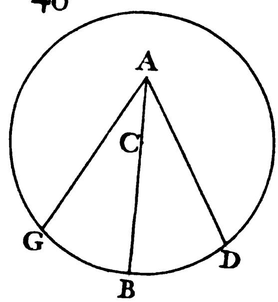




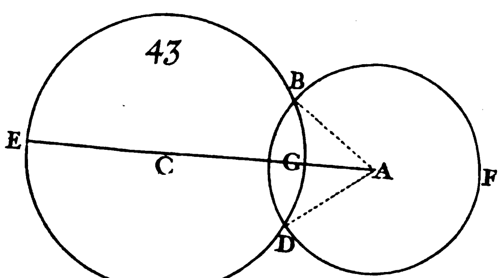
39



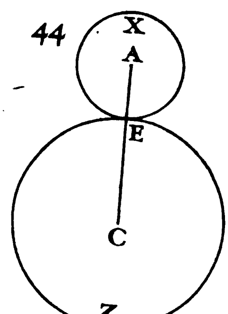
40



43



44



Digitized by Google

Digitized by Google

que el punto J, será este punto J el centro del círculo. Fig.

369 Si se tratase de *hallar el centro de un círculo ó de un arco ya trazado*, se echa de ver que se reduciría toda la operacion á señalar tres puntos á arbitrio en dicho arco, y á practicar lo que acabamos de declarar.

370 Ya que no encontramos mas que un punto J que satisfaga á la pregunta, hemos de inferir que *por tres puntos dados no se puede trazar mas de un círculo*: y que por consiguiente dos circunferencias de círculo no pueden encontrarse en tres puntos sin confundirse una con otra, conforme lo probamos ya arriba (359).

De los Ángulos considerados dentro del círculo.

371 Ya declaramos en otro lugar (287) qual es la medida de los ángulos. Si volvemos á tratar este punto, no es con el fin de dar otro método para medirlos, sino para sentar algunas propiedades que servirán muchísimo en adelante, ya para egecutar algunas operaciones, ya para facilitar algunas demostraciones.

372 *Un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia del círculo, tiene por medida la mitad del arco sobre que descansa.*

Tres son los casos que abraza esta proposicion: porque 1.° puede pasar el uno de los lados del ángulo por el centro del círculo. 2.° puede estar el centro entre los dos lados. 3.° puede estar el centro fuera de dichos lados.

1.° Si el un lado AB pasa por el centro C del círculo, 48.

Digitized by Google

Fig. lo, tírese por el centro la linea *EF* paralela al otro lado *AD*: por causa de las paralelas el ángulo *A* es igual á su esterior *BCF* (329), y tiene por consiguiente la misma medida *BF*: pero el arco *BF* es la mitad del arco *BD*, porque *BF* es igual á su opuesto *EA* (302), que es igual á *FD*, porque está comprehendido entre las mismas paralelas (353). Luego tiene el ángulo *A* por medida la mitad del arco *BD*, sobre el qual descansa.

49. 2.° Si el centro *C* está entre los lados del ángulo *A*, tírese por el centro la linea *AE*, y estará el ángulo *A* dividido en dos ángulos *BAE*, *EAD*, que por tener un lado *AE* que pasa por el centro, tendrán cada uno por medida la mitad de sus arcos *BE*, *ED*, segun acabamos de demostrar: por consiguiente todo el ángulo *A* tendrá por medida la mitad de todo el arco *BD* sobre el qual descansa.

3.° Quando el centro *C* está fuera del ángulo, tíre-
50. se por el centro la linea *AE*: el ángulo total *EAD* tiene por medida la mitad de todo el arco *ED*: pero la parte *BAE* del ángulo tiene por medida la mitad de *BE*. Luego la otra parte *BAD* tendrá tambien por medida la mitad del arco *BD* sobre el qual descansa.

373. Síguese de esta proposicion, que *si dos ángulos que tienen sus vértices el uno en el centro del círculo, y el otro en la circunferencia, descansaren sobre un mismo arco, el que tubiere su vértice en el centro será duplo del otro* (287).

Digitized by Google

374 *El ángulo* A *formado por una cuerda* AD, *y una tangente* AB, *tiene por medida la mitad del arco* ACD *que subtende dicha cuerda.* Fig. 51.

Porque tirando *DE* paralela á la tangente *AB*, el ángulo *DAB* será igual á su alterno *ADE* (330), que tiene por medida la mitad del arco *AE* ó de su igual *ACD* (354). Luego el ángulo *A* tiene tambien por medida la mitad del arco que subtende la cuerda *AD*.

375 De la proposicion arriba (372) probada podemos inferir 1.° *que todos los ángulos* BAE, BCE, 52. BDE, *que tubieren su vértice en la circunferencia, y abrazaren con sus lados el mismo arco ó arcos iguales, serán todos iguales.*

Porque el valor de cada uno será la mitad del mismo arco *BE*.

376 2.° *Que todo ángulo* ABC *cuyo vértice estubiere en la circunferencia, y cuyos lados pasaren por los estremos de un diámetro, será recto ó de 90°.* 54.

Porque abrazará con sus lados la semicircunferencia *AOC*, que es de 180°: y como la mitad ha de ser su medida (372) será por consiguiente de 90°.

377 De esta última proposicion sacamos 1.° un modo para *levantar una perpendicular en el estremo* B *de una linea* FB: quando no se puede prolongar dicha linea, 54. ni practicar lo que enseñamos arriba (321), se practicará lo siguiente.

Desde un punto *D* tomado á arbitrio fuera de la linea

Digitized by Google

Fig. nea *FB*, y con una abertura de compás igual á la distancia *DB*, trácese la circunferencia *ABCO*, que cortará *FB* en algun punto *A*: por este punto y por el centro *D*, tírese el diámetro *ADC*: por el punto *C*, donde este diámetro corta la circunferencia, tírese al punto *B* la linea *CB*, esta será perpendicular á *FB*. Porque el ángulo *CBA* que forma con *FB*, tiene su vértice en la circunferencia, y sus lados pasan por los estremos del diámetro *AC*: este ángulo será pues recto (376): luego *CB* es perpendicular á *FB*.

378 2.° Un método *para tirar desde un punto da-*
55. *do* E *fuera del círculo* ABD *una tangente á la circunferencia de este círculo.*

Júntense el centro *C* y el punto *E*, tirando desde el uno al otro la recta *CE*: descríbase sobre *CE* como diámetro la circunferencia *CAED*, que corta la circunferencia *ABD* en dos puntos *A* y *D*, por cada uno de los quales y por el punto *E*, tirarémos las lineas *DE* y *AE*, y tendrémos las dos tangentes que desde el punto *E* se pueden tirar á la cirrunferencia *ABD*.

Para probarlo tírense los radios *CD* y *CA*: los dos ángulos *CDE*, *CAE* tienen cada uno su vértice en la circunferencia *ACDE*, y los dos lados de cada uno pasan por los estremos del diámetro *CE*: luego (376) estos ángulos son rectos: luego *DE* y *AE* son perpendiculares al estremo de los radios *CD* y *CA*: luego (344) estas lineas son tangentes en *D* y en *A*.

Si

Digitized by Google

379 Si quisiéramos *formar un círculo cuya cuerda* Fig.
AB *sea dada, tal que el segmento* AOBA *sea capaz de* 53.
un ángulo dado abd, *esto es, tal que la mitad del arco* AOB *sea la medida del ángulo* abd; resolveríamos la qüestion del modo siguiente.

Sobre los estremos *A* y *B* de la cuerda *AB* se harán (290) los ángulos *ABO*, *BAO* igual cada uno al ángulo dado *abd*. Por los puntos *A* y *B* tirarémos las lineas *AC*, *BC* perpendiculares á las *AO*, *OB* (321). Desde el punto *C*, donde se encuentran las dos lineas *CA*, *CB*, y con un radio *CB* ó *CA*, trazarémos el círculo *BAD*, cuyo segmento *AOB* será capaz del ángulo propuesto.

Con efecto la linea *OB* perpendicular al estremo del radio *CB*, es tangente (344), y el ángulo *ABO* tiene por medida (374) la mitad del arco *AOB*. Si desde un punto *D* de la circunferencia del círculo se tiran las lineas *DA*, *DB*, el ángulo *ADB* tendrá tambien por medida la mitad del arco *AOB* en virtud de lo dicho (372): luego el ángulo *ADB* = *ABO*; pero este es igual á *abd*, segun hemos supuesto: luego *ADB* = *abd*: luego &c.

380 *Un ángulo* BAC, *cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco* 56.
BC *comprehendido entre sus lados, mas la mitad del arco* DE *comprehendido entre estos mismos lados prolongados.*

Desde el punto *D*, donde el lado *CA* prolongado en-

Digitized by Google

Fig. encuentra la circunferencia, tírese *DF* paralela á *AB*, el ángulo *BAC* es igual á *FDC* (329), y tendrá por consiguiente la misma medida que este, esto es, la mitad del arco *FBC* (372) ó la mitad de *BC* mas la mitad de *BF*, ó (por ser *BF* (354) igual á *DE*) la mitad de *BC* mas la mitad de *DE*.

381 *Un ángulo* BAC, *cuyo vértice está fuera del círculo, tiene por medida la mitad del arco cóncavo* BC
57. *menos la mitad del arco convexo* ED *comprehendido entre sus lados.*

Por el punto *D*, donde *CA* encuentra la circunferencia, tírese *DF* paralela á *AB*. El ángulo *BAC* será igual á *FDC* (329): tendrá, pues, la misma medida que éste, quiero decir la mitad de *CF*, ó la mitad de *BC* menos la mitad de *BF*, ó (por ser *BF* (354) igual á *ED*) la mitad de *BC* menos la mitad de *E D*.

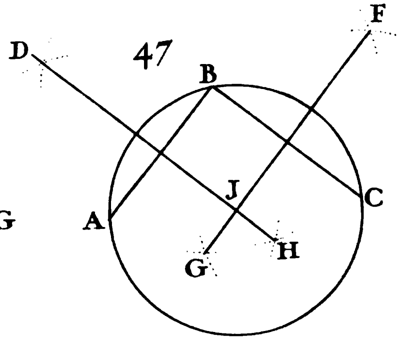
De las Lineas que incluyen un espacio ó de las Figuras planas.

382 Llámase en general *figura* un espacio terminado ó cerrado por todos lados, por lo que hay dos cosas que considerar en qualquiera figura: es á saber, las lineas que la forman, cuyo conjunto se llama *ámbito*, *contorno* ó *perímetra* de la figura, y el espacio, ó superficie que el perímetro encierra. Aquí solo nos proponemos considerar el primero de estos dos puntos, dejando para quando declarémos las propiedades de la superficie, tratar del espacio que coge el perímetro de las figuras.

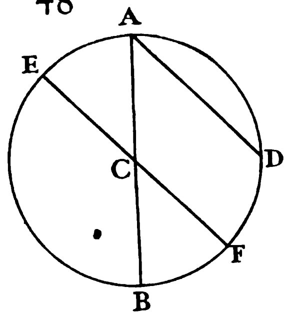
De-

Digitized by Google

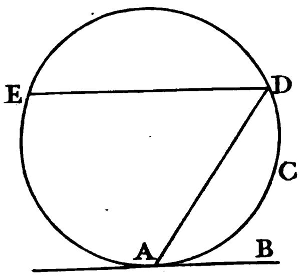
47



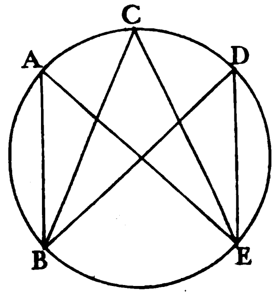
48



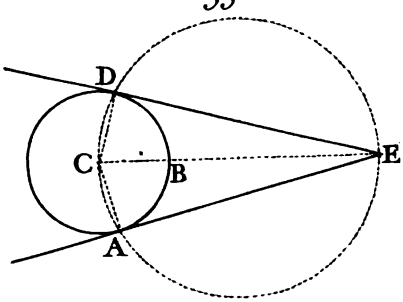
51



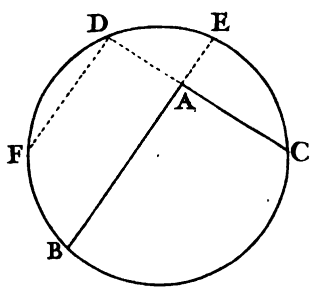
52



55



56



Digitized by Google

Digitized by Google

Decimos de dos ó muchas figuras que son *isoperímetras*, quando son de igual estension sus ámbitos, contornos ó perímetros. Fig.

383 Las *figuras planas* que son las únicas que considerarémos en estos Elementos, no se distinguen del plano, cuya definicion dimos al principio (257).

384 Las *figuras curvas* son aquellas cuyos puntos no están todos igualmente altos ó bajos: la superficie de una bola forma una figura curva.

385 Las *figuras mixtas* son todas aquellas que en parte son planas y en parte curvas.

386 Quando las figuras planas son terminadas por lineas rectas, se llaman *rectilineas*: si son terminadas por lineas curvas, las llamamos *curvilineas*, y *mixtilineas* quando las terminan á un tiempo lineas rectas y lineas curvas. Nuestro intento es tratar solamente de las figuras rectilineas; y por lo que toca á las *curvilineas*, solo harémos mencion del círculo.

387 Para terminar un espacio se necesitan por lo menos tres lineas rectas: y entónces este espacio se llama *triángulo rectilineo*, ó solamente *triángulo*. *ABC* es un 58.
triángulo, porque es un espacio cerrado por tres lineas rectas, ó con mas propiedad, por ser una figura que no tiene sino tres ángulos.

Es evidente que *en qualquiera triángulo la suma de dos lados, tomados como se quisiere, es siempre mayor que el tercero*; AB *mas* BC, *por egemplo*, *valen mas que* AC: 58.

Q por-

Digitized by Google

Fig. porque siendo *AC* la linea recta que vá desde *A* á *C*, es el camino mas corto (263) para ir desde el uno de los dos puntos al otro.

388 Un triángulo cuyos tres lados son iguales, se
59. llama *equilátero*.

389 Aquel cuyos dos lados solos son iguales, se
60. llama *isósceles*.

390 Y aquel cuyos tres lados son todos desiguales,
61. se llama triángulo *escaleno*.

391 El lado inferior de qualquiera triángulo suele llamarse *base* de dicho triángulo, bien que se puede con-
58,59, siderar como base qualquiera de los demás lados. El lado
60,61,
62,63. *AC* es la base de los triángulos que estas figuras representan.

392 La linea perpendicular tirada desde el vértice de un ángulo á la base, se llama *altura del triángulo*. *BD*
59. perpendicular á *AC* es la altura del triángulo *ABC*.

Pero quando dicha perpendicular cae fuera del triángulo, para sacar la altura de esta figura es menester prolongar la base ácia el lado donde cae la perpendicular.
63. Para sacar la altura *BD* del triángulo *ABC*, es menester prolongar la base *AC* hasta el punto *D* donde encuentra la perpendicular bajada desde el vértice *B*.

393 *La suma de los tres ángulos de todo triángulo rectilineo vale dos ángulos rectos, ó* 180°.

58. Prolónguese indefinitamente el lado *AC* ácia *E*, é imagínese la linea *CD* paralela al lado *AB*. Sentado esto, el

Digitized by Google

el ángulo *BAC* es igual al ángulo *DCE* (329), por ser paralelas las lineas *AB* y *CD*. El ángulo *ABC* es igual al ángulo *BCD* por razon de las paralelas (330): luego los dos ángulos *BAC* y *ABC* valen juntos tanto como los dos ángulos *BCD* y *DCE*, esto es tanto como el ángulo *BCE*: pero *BCE* es suplemento (295 y 298) de *BCA*: luego los dos ángulos *BAC* y *ABC* forman juntos el suplemento de *BCA*: luego estos tres ángulos valen juntos 180°. Fig.

394 La proposicion que acabamos de probar manifiesta al mismo tiempo que el *ángulo esterior* BCE *de un triángulo* ABC, *es igual á la suma de los dos interiores* BAC *y* ABC *que le están opuestos.*

395 De las proposiciones poco ha probadas (393 y 394) sacarémos 1.° *que un ángulo* ADB *es igual á la suma de las dos ángulos* DBE, DEB *del triángulo* DBE *que forman sus dos lados prolongados con la perpendicular* BE. 64.

2.° *que será el mismo ángulo suplemento de los dos ángulos* DFE, DEF *que forman con la orizontal* EF *sus dos lados prolongados.*

Lo 1.° salta á la vista, por ser el ángulo *ADB* esterno al triángulo *DBE* (394).

Lo 2.° se prueba tambien con facilidad: porque los dos ángulos *E* y *F* del triángulo *EFG* valen con el ángulo *G* dos ángulos rectos (393): pero este ángulo *G* es igual á su opuesto *ADE*: luego &c.

Con igual facilidad y por los mismos principios pro-

Digitized by Google

Fig. baríamos, que el ángulo *ADF* es suplemento de los ángulos *B* y *E* que forman con la perpendicular *BE* sus dos lados prolongados: y que vale la suma de los dos ángulos *GFE* y *GEF* que forman sus mismos lados prolongados con la orizontal *FE*.

396 Inferamos de lo probado (393) 1.° *que un triángulo rectilineo no puede tener mas de un ángulo recto*; en cuyo caso se llama *triángulo rectángulo*: tal es el trián-
62. gulo *ABC*, cuyo ángulo *A* es recto. El lado de un triángulo rectángulo, opuesto al ángulo recto, se llama *hypotenusa*. BC es la hypotenusa del triángulo rectángulo *BAC*.

397 2.° Que con mas razon *no puede tener mas de un ángulo obtuso*; en cuyo caso se le llama *triángulo ob-*
63. *tusángulo*: tal es el triángulo *ACB*, cuyo ángulo *C* es obtuso.

398 3.° Pero *puede tener todos sus ángulos agudos*: y en este caso se le llama *triángulo acutángulo*: tal es el
65. triángulo *ABC*.

399 4.° Que *conociendo dos ángulos ó solamente la suma de dos ángulos de un triángulo, se conoce el tercer ángulo*, restando de 180° la suma de los dos ángulos conocidos.

400 5.° Que *quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del uno es por precision igual al tercer ángulo del otro*: porque los tres ángulos de cada triángulo valen juntos 180°.

6.°

Digitized by Google

401 6.° Que *los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son siempre complemento el uno del otro.*

Porque una vez que vale 90° el uno de los tres ángulos de un triángulo, los otros dos juntos han de valer tambien 90° (393).

402 Hemos probado arriba (368) que se puede trazar, siempre que se quisiere, una circunferencia de círculo por tres puntos dados, con tal que no estén en linea recta; de donde inferirémos que

Se puede trazar siempre que se quisiere una circunferencia de círculo, por los vértices de los tres ángulos de un triángulo.

Esta operacion se llama *circunscribir* un círculo á un triángulo; y *circunscribir un círculo* á una figura qualquiera, es en general trazar al rededor de dicha figura un círculo, de modo que todos los ángulos de la figura estén en la circunferencia del círculo. Y *circunscribir una figura* qualquiera á un círculo, es en general, trazar al rededor de dicho círculo una figura, de modo que todos sus lados toquen dicha circunferencia.

403 De aquí es facil inferir 1.° *que si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á dichos ángulos serán tambien iguales*: y recíprocamente *si dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos á estos lados serán tambien iguales.*

Porque si trazamos una circunferencia por los tres án-

Q3 gu-

Digitized by Google

Fig. gulos *A, B, C,* y fueren iguales los ángulos *ABC*, *ACB*:
66. los arcos *ADC*, *AEB*, cuyas mitades les sirven de medida (372), serán indispensablemente iguales : luego las cuerdas *AC*, *AB* serán iguales (278). Y recíprocamente, si los lados *AC*, *AB* son iguales, los arcos *ADC*, *AEB* serán iguales: luego los ángulos *ABC*, *ACB* que tienen por medida la mitad de estos arcos, serán iguales.

404 Luego los *tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales, y vale por consiguiente cada uno el tercio de* 180° ó 60°.

67. 405 2.° Que *en un mismo triángulo* ABC *el mayor lado está opuesto al mayor ángulo, el menor lado al menor ángulo*, y recíprocamente.

Porque si el ángulo *ABC* es mayor que el ángulo *ACB*, el arco *ADC* será mayor que el arco *AEB*, y por consiguiente la cuerda *AC* mayor que la cuerda *AB* (279). La recíproca se demuestra del mismo modo.

De la igualdad de los Triángulos.

406 Hay muchas proposiciones cuya demostracion estriba en la igualdad de algunos triángulos que en ellas se consideran: es, pues, del caso declarar aquí las señales que manifiestan esta igualdad.

407 1.° *Son iguales dos triángulos quando tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados iguales, cada uno al suyo.* Si el ángulo *B* del triángulo *BAC* es igual

al

al ángulo *E* del triángulo *EDF*: el lado *AB* igual al lado *DE*, y el lado *BC* igual al lado *EF*; se probará que estos dos triángulos son iguales. Fig. 68.

Concíbase la figura *ABC* sobrepuesta á la figura *DEF*, de modo que el lado *AB* esté exactamente sobre su igual *DE*: ya que el ángulo *B* es igual al ángulo *E*, el lado *BC* caerá sobre *EF* (286), y el punto *C* caerá sobre el punto *F*, pues es, por lo supuesto, *BC* igual á *EF*. Una vez que está el punto *A* en *D*, y el punto *C* en *F*, es evidente que *AC* se aplica exactamente sobre *DF*, y que por lo mismo convienen perfectamente los dos triángulos.

Luego *para construir un triángulo conociendo dos de sus lados y el ángulo que forman*, se tirará una linea *DE* 68.
igual al uno de los lados conocidos: sobre esta linea se formará un ángulo (290) *DEF* igual al ángulo conocido, y haciendo *EF* igual al segundo lado conocido, se tirará *DF*, y estará formado el ángulo que se desea.

408 2.° *Son iguales dos triángulos, quando tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo.* Si el lado *AB* es igual al lado *DE*, 68.
el ángulo *B* igual al ángulo *E*, y el ángulo *A* igual al ángulo *D*, los dos triángulos serán iguales.

Imagínese el lado *AB* aplicado exactamente sobre el lado *DE*, *BC* se confundirá con *EF*, por ser el ángulo *B* igual al ángulo *E* (286); por ser el ángulo *A* igual al ángulo *D*, el lado *AC* se confundirá con *DF*: lue-

Digitized by Google

Fig. go *AC* y *BC* se encontrarán en el punto *F*: luego los dos triángulos serán iguales.

Luego *para construir un triángulo, conociendo uno de sus lados y los dos ángulos adyacentes*, se tirará una linea *DE* igual al lado conocido: en los estremos de esta linea se formarán (290) los ángulos *E* y *D* iguales á los dos ángulos conocidos: hecho esto, los lados *EF*, *DF* de estos ángulos terminarán por su concurso el triángulo que se deseaba construir.

409 Podemos tambien valernos de la última pro-
69. posicion para demostrar *que las partes* AC, BD *de dos paralelas interceptadas entre otras dos paralelas* AB, CD, *son iguales.*

Bájense las dos perpendiculares *AE*, *BF* á la linea *CD*: los ángulos *AEC*, *BFD* son iguales, pues son rectos: y por razon de las paralelas *AC* y *BD*, *AE* y *BF*, el ángulo *EAC* es igual al ángulo *FBD* (335). Fuera de esto, *AE* es igual á *BF* (324): luego los dos triángulos *AEC*, *BFD* son iguales, porque tienen igual un lado adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo: luego *AC* es igual á *BD*.

410 3.° *Son iguales dos triángulos, quando tienen sus tres lados iguales cada uno al suyo.*

68. Sea el lado *AB* igual al lado *DE*, el lado *BC* igual al lado *EF*, y el lado *AC* igual al lado *DF*. Imagínese el lado *AB* exactamente aplicado sobre *DE*, y el plano *BAC* echado sobre el plano de la figura *DEF*: el

el punto *C* se confundirá con el punto *F*. Fig.

Desde los puntos *D* y *E* como centros, y con los radios *DF* y *EF*, trácense los dos arcos *JK* y *HG* que se cortan en *F*: es evidente que el punto *C* ha de ser algun punto de *JK*, por ser *AC* igual á *DF*: el punto *C* ha de ser tambien algun punto de *GH*, por ser *BC* igual á *EF*: ha de ser por consiguiente el punto *F*, que es el único punto que dichos dos arcos pueden tener comun á un mismo lado de *DE*: luego se confunde el un triángulo con el otro, y son por lo mismo iguales.

Luego *para construir un triángulo cuyos tres lados son conocidos*, es menester tirar una recta *DE* igual al uno de 68.
los tres lados conocidos: desde el punto *D* como centro y con un radio igual al segundo lado conocido, se describirá el arco *JK*: desde el punto *E* como centro y con un radio igual al tercer lado conocido, se trazará tambien el arco *GH*: finalmente por el punto de interseccion *F* se tirarán á los puntos *D* y *F* las rectas *FD* y *FE*.

De los Quadriláteros.

411 A los triángulos se siguen los quadriláteros, que son las figuras terminadas por quatro lineas rectas: pero llamarémos simplemente *quadrilátero* una figura, en la qual 70.
no hubiere lado alguno paralelo á otro, cuya figura suelen algunos llamar *trapezoide*.

412 Llamarémos *trapecio* un quadrilátero, en el qual no hay sino dos lados como *AD*, *BC* paralelos. 71.

Lla-

Digitized by Google

Fig. 413 Llamamos *paralelogramo* un quadrilátero, cu-
72,73, yos lados opuestos son paralelos. Por donde se ve que pue-
74,75. de haber quatro especies de paralelogramos, que hemos de
distinguir con nombres particulares.

414 1.° Quando los ángulos y lados contiguos del
72. paralelogramo son desiguales, se le llama *romboide.*

415 2.° Si los lados del paralelogramo fueren igua-
les y desiguales los ángulos contiguos, se le llamará *rom-*
73. *bo* ó *losange.*

416 3.° Llámase *rectángulo* el paralelogramo quan-
do son rectos, y por consiguiente iguales todos sus ángu-
74. los, y desiguales los lados contiguos.

417 4.° Y se le llama *quadrado* al paralelogramo,
75. quando son iguales los lados y los ángulos.

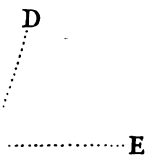
418 Llamamos *diagonal* en un quadrilátero una lí-
70. nea como *AC* tirada desde un ángulo á su opuesto.

419 El lado inferior *BC* de un quadrilátero suele
71. llamarse *base* de dicho quadrilátero.

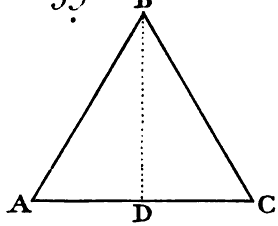
420 Llámase *altura* de un quadrilátero la perpendi-
71. cular *AE* tirada á la base desde el lado opuesto.

421 Ya podemos probar que *todos los ángulos jun-*
70. *tos de un quadrilátero* ABCD *son iguales á quatro ángu-*
los rectos.

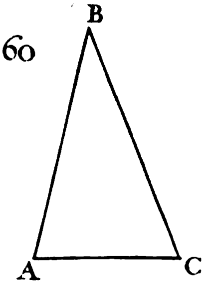
Porque si tiramos la diagonal *AC*, dividirá el quadrilátero en dos triángulos, cuyos ángulos son los mismos que los del quadrilátero: pero los ángulos de cada triángulo valen dos ángulos rectos (393): luego los ángu-
los

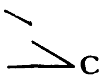


59

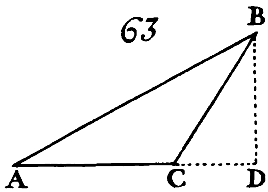


60

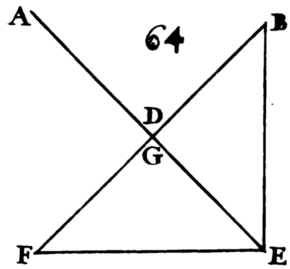




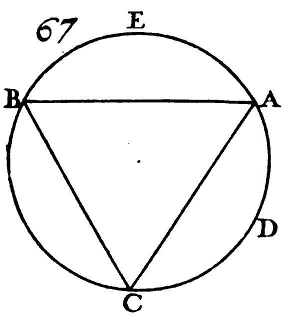
63



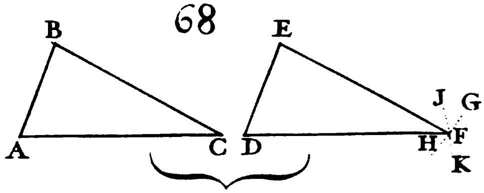
64



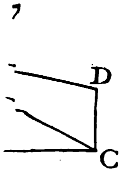
67



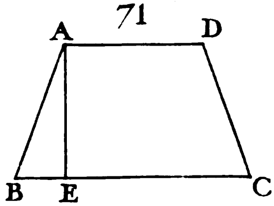
68



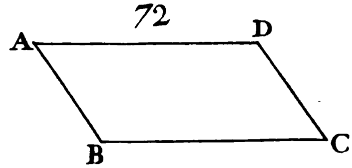
7



71



72



Digitized by Google

los de todo el quadrilátero valen juntos dos veces dos án- Fig.
gulos rectos, ó quatro ángulos rectos.

422 Tambien probarémos que *en un paralelogramo* ABCD *los ángulos opuestos* A *y* C, *ó* B *y* D *son iguales, como tambien los lados opuestos* AD, BC *y* AB, DC. 72.

Porque ya que los lados *AD*, *BC* son paralelos por la naturaleza del paralelogramo (413), los ángulos *D* y *C* valen juntos dos rectos (332). Por la misma razon *A* y *D* valen juntos dos ángulos rectos: luego *A* y *C* tienen un mismo suplemento *D*: luego son iguales (297). Del mismo modo demostrarémos que *B* y *D* son tambien iguales.

Por lo que mira á la segunda parte de la proposicion, queda probada arriba (409) una vez que son paralelos los dos lados opuestos de un paralelogramo.

423 De donde inferirémos 1.° que *si en un para-* 74.
lelogramo un ángulo A *es recto, lo serán todos quatro.* 75.

Porque si *C* es recto, una vez que es suplemento de *D* (332), *D* será tambien recto: y como *D* es tambien suplemento de *A*, será tambien recto el ángulo *A*.

424 2.° *Si dos lados* AD, AB *contiguos á un ángulo* A, *son iguales, los quatro lados serán iguales.* 75.

425 3.° Que las propiedades de los paralelogramos son 1.° *que tengan los lados opuestos paralelos.* 2.° *que tengan estos mismos lados opuestos iguales.* 3.° *que tengan iguales los ángulos opuestos*: y que por consiguiente para saber si una figura de quatro lados es un paralelogramo,

bas-

Digitized by Google

Fig. basta saber si concurren en ella alguna de estas tres condiciones.

74. 426 La diagonal *AC* divide todo paralelogramo en dos triángulos iguales. Porque estos dos triángulos tienen todos sus lados iguales (422): luego son iguales (410).

427 De aquí inferirémos que *si un quadrilátero* ABCD *tubiere iguales y paralelos dos lados opuestos* AB, CD, *tendrá tambien iguales y paralelos los otros dos lados* AD, BC.

Porque tirando la diagonal *AC*, resultarán los dos triángulos iguales *ABC*, *ADC*: luego el lado *AD* será igual al lado *BC*, y el ángulo *BCA* igual al ángulo *CAD* (330), y por consiguiente (334) *AD* y *BC* serán paralelos.

De los Polygonos.

428 Quando son mas de quatro las líneas que terminan un espacio, forman una figura que se llama *polygono*. Quando tiene

5 lados se llama .... *pentágono.*
6 .... *exágono.*
7 .... *eptágono.*
8 .... *octógono.*
9 .... *enneágono.*
10 .... *dedacógono.*

No aumentamos mas esta lista, porque del mismo modo se dá á conocer una figura con nombrar el número de sus la-

lados, como usando de estos diferentes nombres, cuya multitud embarazaria inutilmente la memoria: si hemos especificado los espresados, es porque ocurren con mas frecuencia que los demás. Fig.

429 En un polygono se llama *ángulo saliente* todo ángulo cuyo vértice está fuera de la figura: tales son los ángulos *A*, *B*, *D*, *C* &c. 78.

Angulo *entrante* llamamos aquel cuyo vértice se mete en la figura: el ángulo *CDE* es entrante. 77.

430 *Todo polygono puede ser dividido por diagonales tiradas desde uno de sus ángulos, en tantos triángulos, menos dos, quantos lados tiene.*

Basta mirar las figuras *ABCDE* y *ABCDEF* 76. para hacerse cargo de que es verdadera generalmente esta 77. proposicion.

431 Luego para *hallar la suma de todos los ángulos interiores de un polygono qualquiera*, se ha de tomar 180° tantas veces, menos dos, como lados tiene.

Porque es evidente que la suma de los ángulos interiores de los polygonos *ABCDE* y *ABCDEF* es la 76. misma que la suma de los ángulos de los triángulos *ABC*, 77. *ACD* &c. en que están divididos los polygonos. Pero la suma de los tres ángulos de cada uno de estos triángulos es de 180°: se ha de tomar, pues, 180° tantas veces quantos triángulos hay: esto es (430) tantas veces menos dos, quantos lados tiene el polygono.

Conviene reparar que en la figura *ABCDEF* el 77. án-

Fig. ángulo *CDE* para ser comprehendido en la proposicion antecedente, se ha de contar, no por la parte *CDE* esterior al polygono, sí por la parte *ACDE* compuesta de los ángulos *ADE*, *ADC*; es un ángulo de mas de 180° que debe considerarse como ángulo del mismo modo que otro qualquiera que no llegase á 180°. Porque no es otra cosa un ángulo (284) que la cantidad de que una linea recta se ha movido al rededor de un punto fijo: y sea que se mueva de mas ó menos de 180° la vuelta que dá se llama siempre ángulo.

432 Si se prolongaren ácia una misma direccion todos los lados de un polygono que no tubiese ángulos entrantes, *la suma de todos los ángulos esteriores valdrá*
76. *360°, sea el que fuere el número de los lados del polygono.*

Porque cada ángulo esterior es suplemento del ángulo interior contiguo; así los ángulos esteriores é interiores, tomados juntos, valen tantas veces 180° quantos lados hay: pero para que todos los interiores valgan esta suma, no falta sino dos veces 180° ó 360°: luego los ángulos esteriores valen juntos 360.°

433 Llámase polygono *regular* aquel cuyos lados son todos iguales entre sí, y los ángulos tambien.

Es, pues, facil *hallar siempre que se quiera, quanto vale cada ángulo interior de un polygono regular.*

Porque buscando por medio de lo dicho antes (431) quanto valen juntos todos los ángulos interiores, bastará di-

Digitized by Google

dividir el valor total por el número de los lados. Por egemplo, si se pregunta quánto vale un ángulo interior de un pentágono regular, como son cinco sus lados, tomo 180° cinco veces menos dos, esto es, tres veces; hallo que 540° es el valor de los cinco ángulos interiores: luego ya que son todos iguales entre sí, cada uno será la quinta parte de 540° ó 108°. Fig.

434 *Si en un polygono regular* ABCDE *se tiran desde los vértices* A *y* B *de dos ángulos inmediatos las lineas* AF, BF *que dividan cada uno de dichos ángulos en dos ángulos iguales, dichas lineas tomadas desde los vértices de los ángulos* A *y* B *hasta su punto de concurso* F, *serán iguales, y todas las demas lineas* CF, DF, EF *tiradas desde dicho punto* F *á los demás ángulos, serán tambien iguales á las primeras.* 78.

Porque 1.° el ángulo total en *A* es igual al ángulo total en *B*, pues suponemos que la figura es regular: luego el ángulo *H* que es la mitad del primero, es igual al ángulo *J* que es la mitad del segundo: luego en el triángulo *AFB* los dos lados *FA* y *FB* son iguales (403).

2.° La linea *FC* es igual á la linea *FB*. Lo demostrarémos si probamos que el triángulo *FBC* es igual al triángulo *AFB*: de donde inferirémos que es isósceles del mismo modo que el triángulo *AFB*. Los lados *BA* y *BF* del primero son iguales á los lados *BC* y *BF* del segundo: fuera de esto, por la suposicion, el ángulo *J* comprehendido entre los dos lados del primero es igual al án-

Fig. ángulo *K* comprehendido entre los lados del segundo: luego son iguales en todo los dos triángulos (407): luego el lado *FC* es igual al lado *FB.*

Del mismo modo se demostraria que el lado *FD* es igual al lado *FC*, probando que el triángulo *CFD* es igual en todo al triángulo *BFC* &c.

435 El punto *F* se llama el centro, y las líneas
78. tiradas desde dicho punto á los vértices de los ángulos del polygono, se llaman *radios obliquos*, que son todos iguales entre sí, como lo acabamos de probar. Las lineas tiradas desde el punto *F* perpendicularmente á los lados del polygono como *FG*, *FP* se llaman *radios rectos* ó *apotemas.*

436 Se le puede *circunscribir, siempre que se quisiere, un círculo á un polygono regular dado.*

Porque estando el centro del polygono igualmente distante de cada uno de los ángulos, si desde dicho centro y con un intervalo igual al radio obliquo, como *FA*, se describe una circunferencia, pasará por todos los vértices de los ángulos: será por consiguiente el círculo circunscripto al polygono.

78. 437 *Los radios rectos como* FO, FP &c. *de un polygono regular* ABCDE, *son iguales entre sí.*

Porque si imaginamos un círculo circunscripto al polygono propuesto, cada uno de sus lados será una cuerda de dicho círculo, y estará dividido en dos partes iguales (349) por las lineas tiradas desde el centro *F* perpendiculares á dichos lados.

Lue-

Digitized by Google

Luego en los triángulos *OFA*, *PFA*, el lado *AP* será igual al lado *AO*, el ángulo *FAO* igual al ángulo *FAP* (434), y los ángulos *FPA*, *FOA* serán tambien iguales, pues ambos son rectos: luego los triángulos *FAP*, *FAO* tienen un lado igual á un lado, é iguales los ángulos adyacentes: luego son iguales (408): luego el lado *FP* es igual al lado *FO*. Fig. 78.

Del mismo modo se podrá probar la igualdad de los demás radios rectos.

438 Luego se puede *inscribir*, *siempre que se quisiere, un círculo en un polygono regular dado.*

Porque ya que son iguales todos los radios rectos, si desde el centro del polygono y con el intervalo de un radio recto como *FG*, se traza una circunferencia, tocará todos los lados del polygono, sin pasar mas allá; por consiguiente será inscripto el círculo en el polygono.

439 En virtud de esto podemos suponer, siempre que queramos, que un polygono regular está inscripto ó circunscripto á un circulo.

440 De donde inferirémos 1.° que *el radio recto de un polygono regular corta el lado del polygono en dos partes iguales.*

Porque este polygono puede estar inscripto en un círculo, conforme acabamos de decir: por consiguiente puede cada lado ser considerado como una cuerda. Pero hemos demostrado (349), que quando una linea pasa por el centro y es perpendicular á la cuerda, parte esta cuerda

R en

Fig. en dos partes iguales. Concurriendo, pues, en el radio recto las dos circunstancias de pasar por el centro y ser perpendicular al lado del polygono, que es la cuerda del círculo en que está inscripto, ha de cortar el lado del polygono en dos partes iguales.

441 2.° Que *el radio obliquo de un polygono regular divide en dos partes iguales el ángulo de la circunfe-*
78. *rencia: por egemplo el radio* FB *divide el ángulo* ABC *en otros dos ángulos iguales, que son* FBA *y* FBC.

Porque los triángulos *AFB*, *BFC* tienen el lado *FB* comun, el lado *AB* igual al lado *BC*, por ser regular el polygono, y el lado *AF* igual al lado *FC* (434): luego serán tambien iguales los ángulos del un triángulo á los ángulos del otro (409), y serán iguales entre sí los ángulos *FBA*, *FBC*.

442 *Si se inscriben en un mismo círculo dos polygonos regulares, el que tubiere doblados lados del otro, ten-*
79. *drá mayor perímetro*: pues los dos lados *AB* y *BC* del octógono juntos son mayores que el lado *AC* del quadrado.

En general, el *perímetro del polygono que tiene mas lados, es mayor que el perímetro del polygono que menos lados tiene, suponiéndolos regulares é inscriptos en el mismo círculo ó en círculos iguales.*

Por egemplo, el perímetro del pentágono es mayor que el del quadrado: porque siendo la circunferencia del círculo mayor que el perímetro de qualquier polygono ins-

crip-

Digitized by Google

cripto, es evidente, que quanto mas se acerca á la circunferencia el perímetro de un polygono inscripto, tanto mayor será su perímetro. Pero el perímetro del pentágono se arrima mas á la circunferencia que el del quadrado, pues los lados del pentágono son cuerdas menores que los lados del quadrado, y quanto menores son las cuerdas, menos se distinguen del arco á que pertenecen: luego el perímetro del pentagóno es mayor que el del quadrado. Fig.

443 *Entre todos los polygonos regulares circunscriptos al mismo círculo ó á círculos iguales, el que mas lados tiene, tiene el menor perímetro.*

Esto es evidente quando el uno de los polygonos tiene doblados lados del otro, porque en el octógono el lado *AD* es menor que la parte correspondiente *ABD* del perímetro del quadrado. 80.

Pero se puede demostrar generalmente la proposicion del modo siguiente: la circunferencia de un círculo es menor que el perímetro de qualquiera polygono circunscripto: por consiguiente, quanto mas se acerca á la circunferencia el polygono circunscripto, tanto menor será su perímetro. Pero el polygóno se acerca tanto mas á la circunferencia, quantos mas lados tiene, porque siendo estos lados tangentes, se apartan tanto menos de la circunferencia, quanto son menores: luego quantos mas lados tiene un polygono circunscripto, tanto menor es su perímetro.

444 Síguese de esto, que si un polygono, sea ins-

Fig. cripto, sea circunscripto, tubiese una infinidad de lados, su perímetro se acercaría infinitamente á la circunferencia, y se confundiría con ella; podria, pues, tomarse por la circunferencia misma: por lo que *se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados.*

445 Es evidente, que si desde el centro de un polygono regular se tiran lineas á todos los ángulos, estas lineas formarán ángulos iguales.

Pues estos ángulos tendrán por medida arcos subtensos por cuerdas iguales: luego para *hallar el ángulo del centro de un polygono regular, se han de partir* 360° *por el número de los lados.*

Porque estos ángulos juntos tienen por medida toda la circunferencia. Por egemplo, en el exágono, cada ángulo del centro será la sexta parte de 360° ó será de 60.°

446 Luego *el lado del exágono regular es igual al radio del círculo circunscripto.*

81. Porque tirando los radios *AO* y *BO*, el triángulo *AOB* será isósceles, y por consiguiente los dos ángulos *BAO* y *ABO* serán iguales (403): pero como el ángulo *AOB* es de 60°, los otros dos juntos han de valer 120° (393): luego cada uno de ellos es de 60°; son, pues, iguales los tres ángulos, y por consiguiente el triángulo es equilátero (404): luego *AB* es igual al radio *AO.*

447 Síguese de esta última proposicion que *el perí-*

Digitized by Google

rímetro del exágono regular inscripto en el círculo, es seis Fig.
veces mayor que el radio del círculo: y por lo mismo dicho perímetro es tres veces mayor que el diámetro.

Y como la circunferencia del círculo es mayor que el perímetro del exágono inscripto, la circunferencia del círculo es mas de tres veces mayor que su diámetro: quiero decir, que la razon entre la circunferencia y el diámetro es mayor que la razon de 3 á 1, ó de 21 á 7.

De las Lineas proporcionales.

448 *Si sobre el un lado* AZ *de un ángulo qualquie-* 82.
ra ZAX *se señalan las partes iguales* AB, BC, CD, DE &c. *del tamaño y número que se quisiere: y si despues de tirar á arbitrio por el uno* F *de los puntos de division, la linea* FL *que encuentra en* L *el lado* AX, *se tiran por los otros puntos de division las lineas* BG, CH, DJ, EK &c. *paralelas á* FL: *digo que las partes* AG, GH, HJ &c. *del lado* AX, *serán tambien iguales entre sí.*

Tírense por los puntos *G*, *H*, *J &c.* las lineas *GM*, *HN*, *JO &c.* paralelas á *AZ*: los triángulos *ABG*, *GMH*, *HNJ*, *JOK &c.* serán todos iguales entre sí: porque 1.° las lineas *GM*, *HN*, *JO &c.* son cada una iguales á *AB*, pues (409) son iguales respectivamente á *BC*, *CD*, *DE &c.* 2.° los ángulos *GMH*, *HNJ*, *JOK &c.* son todos iguales entre sí, pues son todos iguales al ángulo *ABG* (335). 3.° Los ángulos *MGH*, *NHJ*, *OJK &c.* son todos iguales entre sí, pues son

Digitized by Google

Fig. todos iguales al ángulo *BAG* (329).

Tienen, pues, todos los triángulos *BAG*, *MGH*, *NHJ &c.* un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo: son, pues, todos iguales entre sí: luego los lados *AG*, *GH*, *HJ &c.* de dichos triángulos son todos iguales entre sí: luego está con efecto dividida la linea *AX* en partes iguales por las paralelas.

449 De donde resulta 1.° *que en un triángulo* FAL, *las lineas* BG, CH, DJ &c. *paralelas á la base* FL, *están en progresion arismética.*

Porque ya que, segun acabamos de demostrar, son iguales entre sí los triángulos *GMH*, *HNJ*, *JOK*, *KPL*, serán tambien iguales entre sí las lineas *MH*, *NJ*, *OK*, *PL*: luego *CH* es *BG* mas *MH*: *DJ* que es *CH* mas *NJ*, será *BG* mas 2 *MH*, por ser *NJ* igual á *MH*. Y como prosiguiendo demostraríamos que *EK* es *BG* mas 3 *MH &c.* queda probada la proposicion.

Como esta demostracion no pende del número de las lineas que se tiren paralelas á la base *FL*, es evidente, que aun quando fuese infinito el número de estas paralelas, quedará verdadera la proposicion.

450 2.° Que *si es* AB *la parte que se quisiere de* AG, BC *será semejante parte de* GH; CD *será semejante parte de* HJ: *si, por egemplo,* AB *es los* $\frac{2}{3}$ *de* AG, BC *será los* $\frac{2}{3}$ *de* GH, *y asi prosiguiendo.*

Lo mismo será de 2, 3, 4 &c. partes juntas de *AF* comparadas con 2, 3, 4 &c. partes juntas de *AL*: lue-

luego una porcion qualquiera *AD* ó *DF* de la linea *AF* Fig.
es la misma parte de la porcion correspondiente *AJ* ó *JL* de la linea *AL*, que *AB* de *AG*: quiero decir que

AD : *AJ* : : *AB* : *AG*

y *DF* : *JL* : : *AB* : *AG*

Tambien se puede decir que *AF* : *AL* : : *AB* : *AG* : luego por ser la razon *AB* : *AG* comun á estas tres proporciones podemos decir que

AD : *AJ* : : *DF* : *JL*

y *AD* : *AJ* : : *AF* : *AL*

451 Luego *si por un punto* D *tomado á arbitrio en* 83.
uno de los lados AF *de un triángulo* AFL, *se tira una linea* DJ *paralela al lado* FL, *los lados* AF, AL *estarán cortados proporcionalmente* : *quiero decir que tendrémos*:

AD : AJ : : DF : JL

y AD : AJ : : AF : AL:

y mudando los dos medios del lugar (186).

AD : *DF* : : *AJ* : *JL*

y *AD* : *AF* : : *AJ* : *AL*,

sea el que fuere el ángulo *FAL*.

452 Luego 1.° *Si desde un punto* A, *tomado á ar-* 84.
bitrio fuera de la linea GL, *se tiran á diferentes puntos de dicha linea, muchas lineas* AG, AH, AJ, AK, AL, *toda linea* BF *paralela á la linea* GL, *cortará todas estas lineas en partes proporcionales* : *quiero decir, que tendrémos*
AB : BG : : AC : CH : : AD : DJ : : AE : EK : : AF : FL
y AB : AG : : AC : AH : : AD : AJ : : AE : AK : : AF : AL.

Fig. Porque considerando succesivamente los ángulos *GAH*,
84. *GAJ*, *GAK*, *GAL*, del mismo modo que hemos consi-
83. derado el ángulo *FAL*, demostrarémos tambien que todas estas razones son iguales.

453 2.° *La linea* AD, *que divide en dos partes*
85. *iguales un ángulo* BAC *de un triángulo, corta el lado opuesto* BC *en dos partes* BD, DC *proporcionales á los lados correspondientes* AB, AC; *esto es de modo que tenemos* BD: DC : : AB : AC.

Porque si por el punto *B* tiramos *BE* paralela á *AD*, que encuentra *CA* prolongado en *E*, considerando el triángulo *CEB*, las lineas *CE*, *CB* estarán cortadas proporcionalmente por la linea *AD* (451), y tendrémos *BD* : *DC* : : *EA* : *AC*. Pero es facil probar que *AE* es igual á *AB* : porque por causa de las paralelas *AD* y *BE*, el ángulo *E* es igual al ángulo *DAC* (329), y el ángulo *EBA* es igual á su alterno *BAD* (330): luego ya que *DAC* y *BAD* son iguales por ser cada uno la mitad de *BAC*, los ángulos *E* y *EBA* serán iguales: luego los lados *AE* y *AB* son tambien iguales (403): luego la proporcion *BD*: *DC* : : *EA* : *AC*, se transforma en esta *BD*: *DC* : : *AB*: *AC*.

83. 454 *Si la linea* DJ *corta proporcionalmente las lineas* AF *y* AL *en los puntos* D *y* J, *de modo, que* AF : AD : : AL : AJ, *la linea* DJ *será paralela á* FL.

Porque segun hemos demostrado (451), la paralela al lado *FL*, tirada desde el punto *D*, ha de cortar en

en *AL* una parte que tenga la misma razon con *AL*, que Fig.
AD con *AF*: pero segun suponemos, *AJ* tiene con *AL* la misma razon que *AD* con *AF*: luego *DJ* es paralela á *FL*.

455 Luego *si se cortan proporcionalmente en los puntos* B, C, D, E, F *las lineas* AG, AH, AJ, AK, AL, 84.
tiradas desde el punto A *á distintos puntos de la linea* G L, *la linea* BCDEF *que pasare por todos estos puntos, será una linea recta paralela á* GL.

456 Las proposiciones demostradas (451 y sig.) son tambien ciertas, quando la linea *BF*, en lugar de estar entre el punto *A* y la linea *GL*, como en la figura 84, 84.
cae mas allá del punto *A*, como en la figura 86. Porque 86.
todo lo que hemos dicho (449 y 450) en que estriban las proposiciones (451 y sig.), se verificaría respecto de las paralelas que cortasen *ZA* y *XA*, prolonga- 82.
das mas allá del punto *A*.

De la Semejanza de los Triángulos.

457 Quando se comparan dos triángulos uno con otro, ó en general dos figuras qualesquiera, se dice que son *semejantes* quando los ángulos de la una son iguales á los ángulos de la otra, y los lados de la primera proporcionales á los lados correspondientes de la segunda. Los dos triángulos *ADJ*, *AFL* serán semejantes si el ángu- 87.
lo *A* es igual al ángulo *A*, el ángulo *D* al ángulo *F*, y el ángulo *J* al ángulo *L*, y ademas de esto *AD* : *AF* :: *AJ* : *AL* :: *DJ* : *FL*.

Es-

Digitized by Google

Fig. 458 Estos lados correspondientes se llaman *lados homólogos*, y son homólogos dos lados quando están puestos de un mismo modo en ambas figuras, respecto de los ángulos y demas lados. Así para que se puedan llamar homólogos dos lados, es menester que los ángulos adyacentes al primero sean respectivamente iguales á los ángulos adyacentes al segundo. *DJ* y *FL* no pueden ser homó-
87. logos, á no ser que los ángulos *D* y *J* sean respectivamente iguales á los ángulos *F* y *L*.

459 *Dos triángulos que tienen los ángulos iguales, cada uno al suyo, tienen proporcionales sus lados homólogos, y son por consiguiente semejantes.*

87. Si los dos triángulos *DAJ*, *FAL* son tales que el ángulo *A* del primero sea igual al ángulo *A* del segundo, el ángulo *D* al ángulo *F*, y el ángulo *J* al ángulo *L*: digo que tendrémos *AD* : *AF* : : *AJ* : *AL* : : *DJ* : *FL*.

Porque ya que el ángulo *A* del primero es igual al ángulo *A* del segundo, se puede aplicar el uno de estos dos triángulos sobre el otro, conforme representa la figu-
83. ra 83; en cuyo supuesto ya que el ángulo *D* es igual al ángulo *F*, las lineas *DJ* y *FL* serán paralelas (334): luego en virtud de lo dicho (451) tendrémos *AD*: *AF* : : *AJ*: *AL*.

Tirémos ahora por el punto *J* la recta *JH* paralela á *AF*: segun hemos probado (451) tendrémos *AJ*: *AL* : : *FH* : *FL*, ó (por ser *FH* igual á *DJ* (409)) : : *DJ* : *FL*; luego *AD*: *AF* : : *AJ* : *AL* : : *DJ*: *FL*.

Co-

Digitized by Google

Como podemos mudar los medios de lugar, tambien Fig.
podemos decir que *AD* : *AJ* : : *AF* : *AL* y *AJ* : *DJ* : : *AL* : *FL*.

460 Ya que (400) quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del primero es indispensablemente igual al tercer ángulo del segundo: inferamos que *dos triángulos son semejantes quando tienen dos ángulos iguales cada uno al suyo.*

461 Hemos probado (335) que dos ángulos que están vueltos ácia un mismo lado, y tienen sus lados paralelos son iguales. Luego *dos triángulos que tienen todos sus lados paralelos, cada uno al suyo, tienen tambien todos sus ángulos iguales, cada uno al suyo, y tienen por consiguiente proporcionales (459) sus lados.*

Esto se verifica en los dos triángulos *ABE*, *CDF* 88.
que tienen paralelos los lados *AB* y *CD*, los lados *BE* y *DF*, y los lados *AE* y *CF*.

462 Luego tambien *dos triángulos que tienen sus lados perpendiculares cada uno al suyo, tienen tambien estos mismos lados proporcionales.*

Porque si se le hace dar un quarto de conversion al uno de dichos triángulos, sus lados llegarán á ser paralelos á los del segundo.

463 *Si desde el ángulo recto* A *de un triángulo rec-* 89.
tángulo BAC *se baja una perpendicular* AD *al lado opuesto* BC : 1.° *los dos triángulos* ADB, ADC *serán seme-*

jan-

Digitized by Google

Fig. *jantes el uno al otro y al triángulo* BAC. 2.° *La perpendicular* AD *será media proporcional entre las dos porciones ó segmentos* BD *y* DC *de la hypotenusa.* 3.° *Cada lado* AB *ó* AC *del ángulo recto será medio proporcional entre la hypotenusa y el segmento correspondiente* BD *ó* DC.

Porque los dos triángulos *ADB*, *ADC* tienen cada uno un ángulo recto en *D*, del mismo modo que el triángulo *BAC* tiene un ángulo recto en *A*; tienen fuera de esto cada uno un ángulo comun con el mismo triángulo *BAC*, pues el ángulo *B* pertenece á un mismo tiempo al triángulo *ADB*, y al triángulo *BAC*, del mismo modo el ángulo *C* pertenece al triángulo *ADC*, y al triángulo *BAC*: luego (460) estos tres triángulos son semejantes: luego (459) comparando los lados homólogos de los dos triángulos *ADB* y *ADC*, tendrémos

$$BD : AD :: AD : DC:$$

comparando los lados homólogos de los dos triángulos *ADB* y *BAC*, tendrémos

$$BD : AB :: AB : BC.$$

Finalmente, comparando los lados homólogos de los triángulos *ADC* y *BAC*, tendrémos

$$CD : AC :: AC : BC.$$

Donde se vé que *AD* es media proporcional (178) entre *BD* y *DC*: *AB* media proporcional entre *BD* y *BC*: y finalmente *AC* media proporcional entre *CD* y *BE*.

464 *Dos triángulos que tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales, tienen tambien sus*

Digitized by Google

sus otros dos ángulos iguales, y son por consiguiente semejantes. Fig.

Si los dos triángulos *ADJ*, *AFL* son tales que el ángulo *A* del primero sea igual al ángulo *A* del segundo, y si al mismo tiempo los lados que forman estos ángulos son tales, que tengamos *AD* : *AF* : : *AJ* : *AL* : digo que serán semejantes; esto es que tendrán los demás ángulos iguales cada uno al suyo, y sus terceros lados *DJ* y *FL* en la misma razon que *AD* y *AF* ó que *AJ* y *AL*. 87.

Porque podemos aplicar el ángulo *A* del triángulo *ADJ* sobre el ángulo *A* del triángulo *AFL*, conforme representa la figura 83. Pero ya que, segun suponemos, *AD* : *AF* : : *AJ* : *AL*, las dos rectas *AF* y *AL* están cortadas proporcionalmente en los puntos *D* y *J* : luego *DJ* es paralela á *FL* (454) : luego (329) el ángulo *AFL* es igual al ángulo *ADJ*, y el ángulo *ALF* igual al ángulo *AJD*. 83.

De aquí y de lo dicho antes (459) se infiere que *DJ* : *FL* : : *AD* : *AF* : : *AJ* : *AL*.

465 *Dos triángulos que tienen proporcionales sus tres lados homólogos, tienen los ángulos iguales cada uno al suyo, y son por lo mismo semejantes.*

Si se supone que *DE* : *AB* : : *EF* : *BC* : : *DF* : *AC*; digo que el ángulo *D* será igual al ángulo *A*, el ángulo *E* igual al ángulo *B*, y el ángulo *F* igual al ángulo *C*. 90.

Imaginemos que sobre *DE* se haya construido un triángulo *DGE*, cuyo ángulo *DEG* sea igual al ángulo

B,

Fig. *B*, y el ángulo *GDE* igual al ángulo *A*; el triángulo *DEG* será semejante al triángulo *ABC* (460): luego (459) *DE* : *AB* : : *GE* : *BC* : : *DG* : *AC*; pero, segun el supuesto, tenemos *DE* : *AB* : : *EF* : *BC* : : *DF*: *AC* : luego por causa de la razon comun *DE* : *AB*, tendrémos *GE* : *BC* : : *DG* : *AC* : : *EF*: *BC* : : *DF*: *AC*, de donde podemos sacar estas dos proporciones

GE : *BC* : : *EF* : *BC*

y *DG* : *AC* : : *DF* : *AC*.

Luego yá que en cada una de estas dos proporciones son iguales entre sí los consecuentes, serán tambien iguales entre si los antecedentes : luego *GE* es igual á *EF* y *DG* igual á *DF*. Tiene, pues, el triángulo *DEG* sus tres lados iguales á los del triángulo *DEF* : es pues igual (410) á este triángulo *DEF*; pero acabamos de probar que el triángulo *DEG* es semejante á *ABC* : luego es tambien *DEF* semejante á *ABC*.

83. 466 Hemos probado antes (461), que quando se cortan dos lados de un triángulo por una linea paralela al tercer lado resultan triángulos *ADJ* y *AFL* semejantes; como esto es cierto, sea la que se quisiere la cantidad del ángulo *A*, se debe, pues, inferir que los
84. triángulos *AGH*, *AHJ*, *AJK*, *AKL* son semejantes á los triángulos *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEF*, cada uno al suyo, y que por ultimo (459) *KL* : *EF* : : *AK* : *AE* : : *KJ* : *ED* : : *AJ* : *AD* : : *JH* : *DC* : : *AH* : *AC* : : *GH*: *CB* : luego no sacando de esta série de razones, sino las

que

Digitized by Google

que contienen partes de las lineas *GL* y *BF*, tendrémos Fig.
KL : *EF* : : *KJ* : *DE* : : *JH* : *CD* : : *GH* : *BC*; esto es, que *si desde un punto* A *se tiran á diferentes puntos de una linea recta* GL, *otras muchas lineas rectas, estas lineas cortarán toda paralela á* GL, *del mismo modo que cortarán* GL; *esto es, en partes que tendrán unas con otras las mismas razones que las partes correspondientes de* GL.

467 La proposicion arriba (448) sentada nos enseña un modo muy sencillo para *dividir una linea dada en partes iguales ó en partes que tengan entre sí razones dadas.*

Supongamos que nos convenga dividir la linea *AR* 82.
en dos partes que tengan entre sí una razon dada, pongo por caso, la de 7 á 3; por el punto *A* se tirará de modo que forme con *AR* el ángulo que se quisiere, la linea indefinita *AZ*, y tomando una abertura de compás arbitraria *AB*, se llevará diez veces á lo largo de *AZ*: supongo que sea *Q* el estremo de la última parte, se juntarán los estremos *Q* y *R* de la linea *AQ* y de la linea *AR*: hecho esto, si por el punto *D*, estremo de la tercera division, se tira *DJ* paralela á *QR*, la linea *AR* estará dividida en dos partes *RJ* y *AJ* que serán entre sí : : 7 : 3; porque (450) son entre sí : : *DQ*: *AD* que hemos hecho de 7 y de 3 partes.

Esto manifiesta que si quisiésemos dividir la linea *AR* en un número mayor de partes, pongo por caso en cinco partes que fuesen entre sí como los números 7, 5, 4, 3,

Digitized by Google

Fig. 2; se sumarian unos con otros todos estos números, saldria la suma 21: se llevarian 21 aberturas de compás sobre la linea *AZ*, y se tirarian paralelas á la linea *QR*, por los estremos de la 7^a, 5^a, 4^a, 3^a, y 2^a division.

Si las razones estubiesen determinadas en lineas, se pondrian todas estas lineas á continuacion las unas de las otras sobre la linea *AZ*.

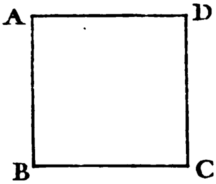
Esto manifiesta lo que se deberia practicar para dividir la linea *AR* en partes iguales. Pero quando las partes de la linea que se intenta dividir han de ser pequeñas ó quando es muy pequeña la linea que se ha de dividir, la mas mínima discrepancia entre las paralelas contribuye muchísimo para alterar la igualdad de las partes: por lo que no será inutil declarar el método siguiente.

468 Sea *fg* la linea que se ha de dividir en par-
91. tes iguales, en seis, por egemplo: se tirará una linea indefinita *BC*, en la qual se señalará seis veces de seguida una misma abertura de compás arbitraria, y resultarán seis partes iguales: se trazará sobre *BC* un triángulo equilátero *BAC*, describiendo desde los puntos *B* y *C* como centros, y con un radio igual á *BC* dos arcos que se corten en *A*. Sobre los lados *AB*, *AC* se tomarán las partes *AF*, *AG* cada una iguales á *fg*: y tirando *FG*, esta linea será igual á *fg*. Por el punto *A* se tirarán á todos los puntos de division de *BC* lineas rectas que cortarán *FG* del mismo modo que está cortada *BC*.

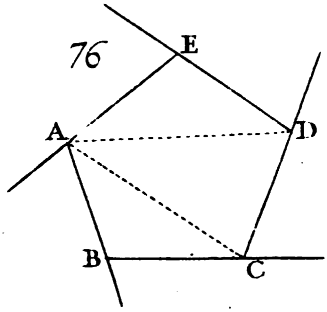
Porque como las lineas *AF* y *AG* son iguales entre sí,

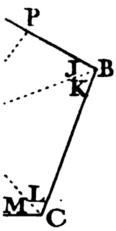
Digitized by Google

75

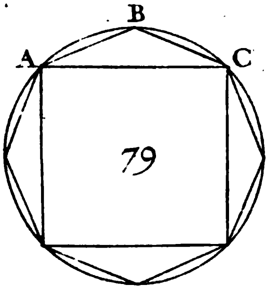


76

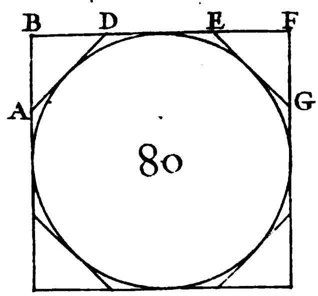




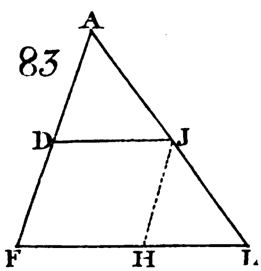
79

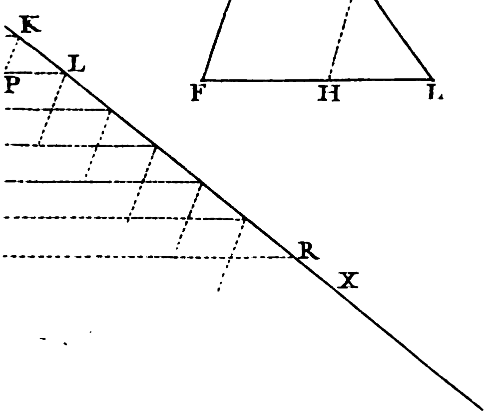


80

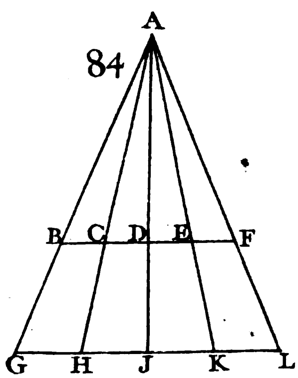


83





84



Digitized by Google

sí, y son tambien iguales entre sí las lineas *AB* y *AC*, tenemos *AB* : *AF* : : *AC* : *AG* : luego *AB* y *AC* están cortadas proporcionalmente en *F* y *G* : luego *FG* es paralela á *BC*, y por consiguiente (461) el triángulo *FAG* es semejante á *ABC* : luego *FAG* es equilátero: luego *FG* es igual á *AF*, y por lo mismo á *fg*. A mas de esto, como *FG* es paralela á *BC*, estas dos lineas estarán cortadas (466) proporcionalmente por las lineas tiradas desde el punto *A* á la recta *BC*. Fig. 91.

469 *Si desde los puntos* P, Q *de una misma recta* PQ *se tiran dos paralelas* PM, QN *desiguales, y otras dos paralelas* PO, QR *proporcionales á las dos primeras: esto es, que sean* PM : QN : : PO : QR, *las dos rectas* OR, MN *tiradas por los estremos de dichas paralelas, concurrirán, prolongadas si fuere menester, en un mismo punto* S *con la recta* PQ, *tambien prolongada si fuese del caso.* 92. 93.

Supongamos que la recta *OR* concurra en *S* con la *PQ*, y que la recta *MN* concurra en *T* con la misma *PQ* : el punto *T* coincidirá con el punto *S*. Porque los triángulos *MPT*, *NQT* son semejantes (459), y tendrémos *PT* : *QT* : : *PM* : *QN* : por la construccion tenemos tambien *PM* : *QN* : : *PO* : *QR*, y por la semejanza de los triángulos, *OPS*, *RQS* tenemos *PO* : *QR* : : *PS* : *QS* : luego *PT* : *QT* : : *PS* : *QS* : luego (188) *PT* — *QT* : *QT* : : *PS* — *QS* : *QS* ó *PQ* : *QT* : : *PQ* : *QS*, y por consiguiente *QT* es igual á *QS* : coincide, pues, el punto *T* con el punto *S*.

Digitized by Google

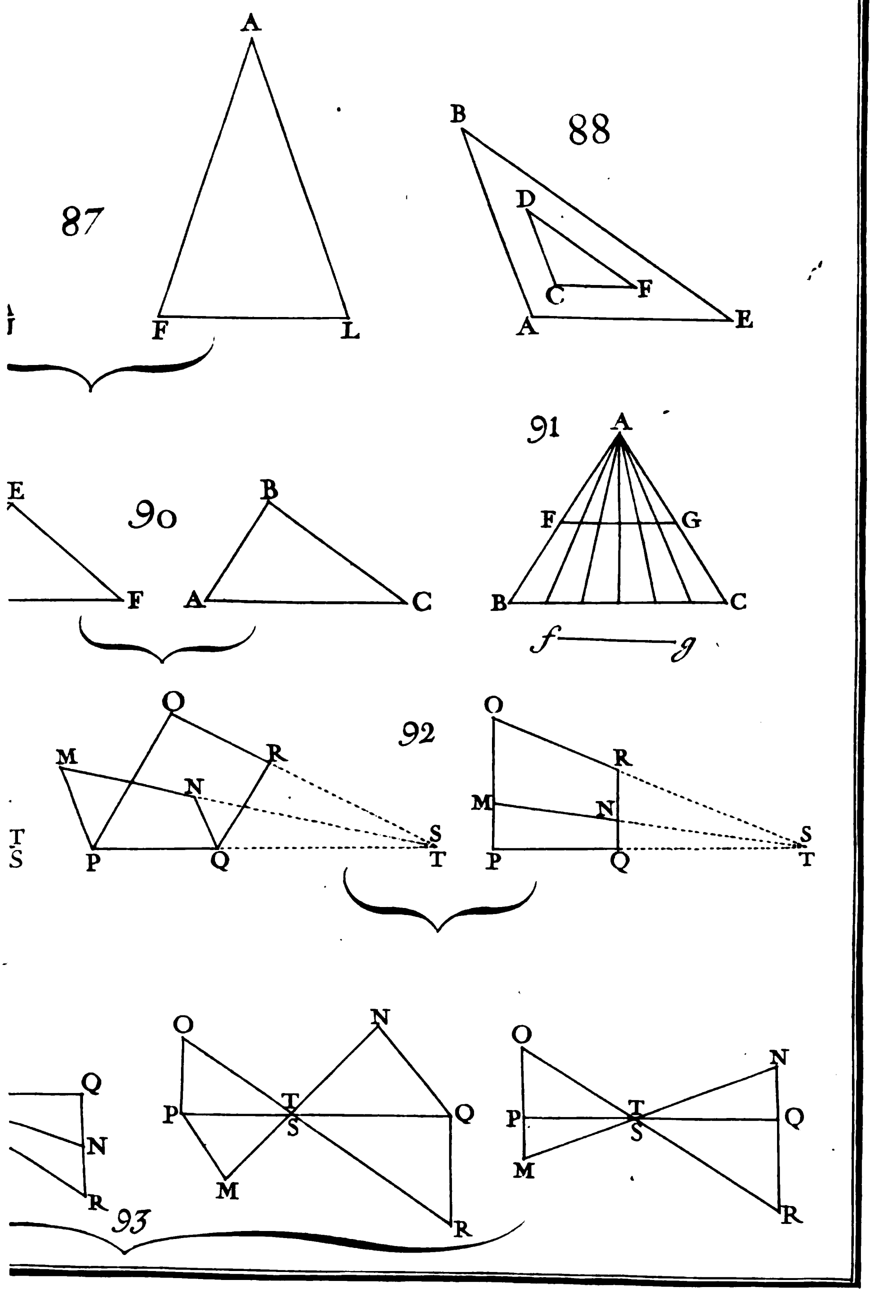
Fig. Si estubiesen las lineas *MN*, *OR* en la situacion que representa la figura 93 de la proporcion *PT* : *QT* :: *PS*: *QS*, sacaríamos *PT* + *QT* : *QT* :: *PS* + *QS* : *QS*; esto es *PQ* : *QT* :: *PQ*: *QS*, de la que tambien inferiríamos que *QT* es igual á *QS*.

470 De la última proposicion sacamos lo que hay que practicar para *tirar por un punto dado* P *cerca de dos*
94. *lineas* AB, CD *convergentes*, esto es, *que ván á juntarse en*
95. *un punto, una linea que vaya á parar prolongada al mismo punto donde concurririan, tambien prolongadas, las dos lineas dadas.*

Tiraráse por el punto dado *P* la recta *MPO* ó *MOP* que encuentra en *O* y *M* las dos rectas dadas *AB*, *CD*, y por otro punto qualquiera se tirará á la *POM* una paralela *NQR* ó *QRN*, que encontrará las rectas dadas en los puntos *N* y *R*. Sobre la recta *MO* se construirá un triángulo equilátero *MSO*, y sobre los lados prolongados si fuere menester *SM*, *SO* de este triángulo se tomarán las porciones *Sn*, *Sr* iguales á la linea *NR*, y se tirará *nr*. El triángulo *Snr* será equilátero (454 y 481), y por consiguiente *nr* y *Sn* serán iguales entre sí y á la linea *NR*. Tírese finalmente desde el vértice *S* del triángulo equilátero, y por el punto *P* la recta *SP*, que prolongada, si fuere menester, cortará en *q* la recta *nr*, tambien prolongada si conviniere. Hecho esto se pasará la porcion *qr* á *QR* sobre la recta *QRN*, y por el punto *Q*, determinado de este modo, y el punto dado *P* se tirará la recta *PQ*, que se dirigirá al punto de concurso de las dos lineas *AB*, *CD*.

Por-

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Porque en virtud de la construccion tendrémos *PM*: Fig.
PO : : *qn* : *qr* (466), y por la misma construccion 94.
tambien es *QR* igual á *qr* : luego si restamos estas dos partes 95.
iguales de las lineas iguales *NR*, *nr*, las rectas *QN* y *qn* serán iguales. Y así substituyendo *QN*, *QR* en lugar de las *qn*, *qr* de la primera proporcion, tendrémos *PM* : *PO* : : *QN* : *QR* : luego concurrirán en un mismo punto (469) las tres rectas *AB*, *CD*, *PQ*.

471 De la proposicion sentada (451) podemos sacar un método para *hallar una quarta proporcional á tres lineas dadas* ab, cd, ef; *esto es, una linea que sea el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros serian las lineas* ab, cd, ef. 96.

Para egecutarlo, despues de tiradas dos rectas indefinitas *AF*, *AL* que formen una con otra el ángulo que se quisiere, se llevará *ab* desde *A* á *D*, y *cd* desde *A* á *F*: se llevará igualmente *ef* desde *A* á *J* : y juntando los dos puntos *D* y *J* con la recta *DJ*, se tirará por el punto *F* la recta *FL* paralela á *DJ*, y determinará *AL*, que será la quarta proporcional que se busca.

Se podrá tambien egecutar esta operacion en virtud de la proposicion sentada (451). Para cuyo fin se tomarán en una linea indefinita *AF* las dos partes *AD*, *AF* iguales á *ab*, *cd* respectivamente : y tirando *DJ* 96.
igual á *ef*, de modo, que forme con *AF* el ángulo que se quisiere, se tirará por el punto *A* y el punto *J*, la recta *AJL* : y cortándola por una linea *FL* paralela á *DJ*, es-

Fig. esta paralela será el quarto término que se busca.

De las Lineas proporcionales consideradas en el círculo.

472 Decimos de dos lineas que están cortadas en *razon inversa* ó *recíproca*, quando se forma una proporcion con las partes de dichas lineas, de manera que las dos partes de la una sean los estremos, y las dos partes de la otra los medios de la proporcion.

Y se dice de dos lineas que son *recíprocamente proporcionales* á sus partes, quando la una de dichas lineas y su parte forman los estremos de una proporcion, siendo los medios otra linea y su parte.

97. 473 *Dos cuerdas* AC, BD *que se cortan en el círculo en un punto qualquiera* E, *formando un ángulo qualquiera, se cortan siempre en razon recíproca: quiero decir, que* AE : BE : : ED : CE.

Porque si se tiran las cuerdas *AB*, *CD*, se forman dos triángulos *BEA*, *CED* que demostrarémos facilmente ser semejantes: porque fuera del ángulo *BEA* igual á *CED* (302), el ángulo *ABE* ó *ABD* es igual al ángulo *DCE* ó *DCA*, pues estos dos ángulos tienen su vértice en la circunferencia y descansan sobre el mismo arco *AD* (375): luego los triángulos *BEA* y *CED* son semejantes (460): luego tienen sus lados homólogos proporcionales; esto es, que *AE*: *BE* : : *DE* : *EC*, donde se ve que las partes de la cuerda *AC* son los estremos, y las partes de la cuerda *BD* son los medios.

Ya

Digitized by Google

474 Ya que es cierta la proposicion que acabamos de probar, esté donde estubiere el punto *E*, y forme el ángulo que se quisiere la linea *AC* con la *BD*, será tambien cierta quando las cuerdas fueren perpendiculares la una á la otra y la una de ellas *AC*, por egemplo, pasare por el centro: pero como en este caso la cuerda *BD* está dividida en dos partes iguales (349), los dos términos medios de la proporcion *AE* : *BE* : : *DE* : *CE*, son iguales y la proporcion se transforma en estotra *AE* : *BE* : : *BE* : *CE* : luego *toda perpendicular, bajada desde un punto* B *de la circunferencia al diámetro, es media proporcional entre las dos partes* AE, CE *de dicho diámetro.* Fig. 98.

475 Entre muchos usos para que puede servir esta proposicion, declararémos solo uno que consiste en *hallar una media proporcional entre dos lineas dadas* ae, ec. 99.

Tiraráse una recta indefinita *AC*, sobre la qual se colocarán punta con punta dos lineas *AE*, *EC* iguales á las lineas dadas *ae*, *ec*: y trazando sobre toda la *AC* como diámetro el semicírculo *ABC*, se levantará en el punto de union *E* la perpendicular *EB* sobre *AC*; esta perpendicular será la media proporcional que se pide.

476 *Dos secantes* AB, AC *que tiradas desde un mismo punto* A *fuera del círculo, ván á parar á la parte cóncava de la circunferencia, son siempre recíprocamente proporcionales á sus partes esteriores* AD, AE, *esté donde estubiere el punto* A *fuera del círculo, y sea el que fuere el ángulo que forme la una secante con la otra.* 100.

 Ima-

Digitized by Google

Fig. Imaginémos las cuerdas *CD* y *BE*, resultarán dos triángulos *ADC*, *AEB*, en los quales 1.° el ángulo *A* es comun, el ángulo *B* es igual al ángulo *C*, por tener ambos su vértice en la circunferencia, y abrazar el mismo arco *DE* (375): luego (460) estos dos triángulos son semejantes, y tienen por consiguiente sus lados proporcionales: luego *AB* : *AC* : : *AE* : *AD*, donde se vé que la secante *AB* y su parte esterior *AD*, son los estremos, siendo la secante *AC* y su parte esterior los medios.

101. 477 Infiérese de aquí que *si la linea* AB *fuese ó llegase á ser tangente, será media proporcional entre la secante entera* AC *y su parte esterior* AE.

Porque los ángulos *ACB*, *ABE* son iguales, pues tiene cada uno por medida la mitad del mismo arco (372 y 374) *EDB*: los ángulos *ABC*, *AEB* son tambien iguales; porque el ángulo *ABC* tiene por medida la mitad del arco *CEDB* (374), y los dos ángulos inmediatos *AEB*, *BEC* tienen por medida la mitad de toda la circunferencia (298): como el ángulo *CEB* tiene por medida la mitad del arco *CFB*, quedará para medida de *AEB* la mitad de *CEDB*: luego el ángulo *AEB* será igual al ángulo *ABC*: luego los dos triángulos *AEB*, *ABC* que tienen dos ángulos iguales á dos ángulos, tendrán el tercer ángulo igual al tercer ángulo (400): luego serán semejantes (459): por consiguiente tendrémos *AC* : *AB* : : *AB* : *AE*: luego es la tangente media proporcional entre la secante entera tirada desde un mis-

Digitized by Google

mismo punto y la parte esterior de la misma secante. Fig.

478 Puede servir esta proposicion para *cortar una linea en media y estrema razon.*

Dícese de una linea *AB*, que está cortada en *media* 102.
y *estrema razon*, quando lo está en dos partes *AC*, *BC* tales que la una *BC* de estas partes es media proporcional entre toda la linea *AB* y la otra parte *AC*; esto es, tales que sea

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Egecútase esta division del modo siguiente. En el un estremo *A* se levanta una perpendicular *AD* igual á la mitad de *AB*: desde el punto *D* como centro y con un radio igual á *AD*, se traza una circunferencia que corta en *E* la linea *BD*, que junta los dos puntos *B* y *D*. Finalmente se lleva *BE* desde *B* á *C*, describiendo desde el punto *B* como centro y con *BE* por radio, el arco *CE*, y con esto estará cortada la linea *AB* en media y estrema razon en el punto *C*.

Con efecto, siendo la linea *AB* perpendicular á *AD*, es tangente (348): y como *BF* es secante, tenemos (477) $BF : AB :: AB : BE$ ó BC: luego (189) $BF - AB : AB - BC :: AB : BC$; pero *AB* es igual á *FE*, por ser *AB* dupla de *AD*: luego $BF - AB$ es igual á *BE* ó *BC*: y como $AB - BC$ es *AC*, tenemos $BC : AC :: AB : BC$, ó (185) $AC : BC :: BC : AB$.

Digitized by Google

Fig.

De las Figuras semejantes.

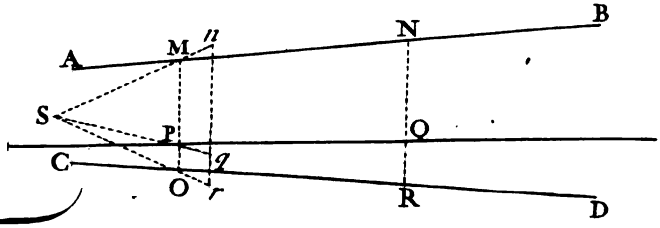
479 Ya digimos antes (457), que son semejantes dos figuras, quando cada ángulo de la una es igual á cada ángulo de la otra en la misma órden, y los lados de la primera son proporcionales á los lados correspondientes de la segunda. Digimos tambien que estos lados correspon-
103. dientes como *AB* y *ab*, *CD* y *cd*, *DE* y *de*, *EA* y *ea* se llaman lados homólogos. Son, pues, homólogos, segun prevenimos en otra parte (458), dos lados quando están colocados de un mismo modo cada uno en su figura, respecto de los ángulos y demás lados: así para que dos lados sean homólogos es preciso que los ángulos adyacentes al primero sean respectivamente iguales á los ángulos adyacentes al segundo. Por egemplo, son homólogos *AB* y *ab*, si *A* y *B* son iguales respectivamente á los ángulos *a* y *b*.

480 *Pueden los ángulos de un polygono ser iguales respectivamente á los ángulos de otro polygono, sin que los lados del uno sean proporcionales á los lados del otro.*

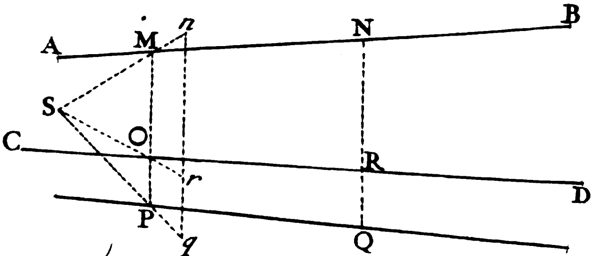
Porque si tenemos dos exágonos semejantes, por egem-
104. plo, *abcdef* y *ABCDEF*, y prolongamos dos lados del segundo, como *BC* y *ED*, y se tira la linea *GH* paralela al lado *CD*, resultará un tercer exágono *ABGHEFA*, cuyos ángulos son iguales á los del segundo, por causa de las paralelas *GH* y *CD*: por consiguiente los ángulos de este tercer exágono son tambien iguales á los ángulos del primero. No obstante, los lados del tercer exá-

go-

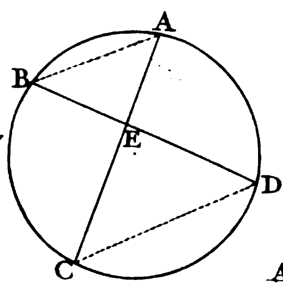
Digitized by Google



94

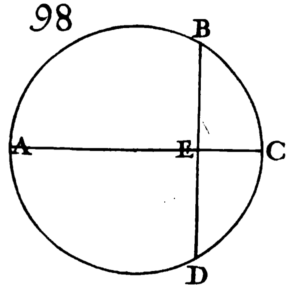


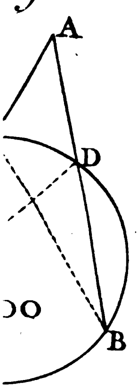
95



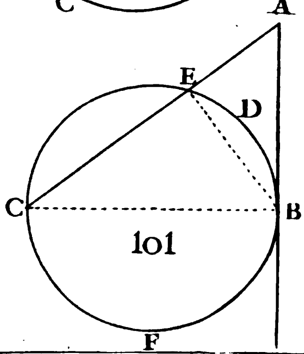
97

98





00



101

Digitized by Google

gono no son proporcionales á los del primero, porque una vez que por lo supuesto los lados del polygono *ABCDEF* son proporcionales á los del primero, es imposible que los lados del tercer exágono sean proporcionales á los lados del primero. Fig.

481 *Pueden tambien ser proporcionales los lados de un polygono á los lados de otro, sin que sean iguales los ángulos del uno á los ángulos del otro.*

Sean por egemplo dos exágonos semejantes *abcdef*, y *ABCDEF*: tírense desde los dos ángulos *B* y *F* las dos lineas *BG* y *FL* iguales respectivamente á los dos lados *BC* y *EF*: desde el punto *G* y con el intervalo *CD* trácese un arco ácia el punto *D*. Desde el punto *L* y con el intervalo *ED* trácese otro arco, que corte el primero en un punto como *H*; finalmente tírense las lineas *GH* y *HL*; resultará un tercer exágono *ABGHLF*, cuyos lados son iguales por la construccion á los del segundo y por lo mismo proporcionales á los del primero; y sin embargo es patente que los ángulos del tercer exágono no son iguales á los ángulos del segundo, ni por consiguiente á los del primero. 105.

482 Infiérese de todo esto que *para asegurar que son semejantes dos polygonos, es indispensable estar seguro 1.° de que son iguales los ángulos del uno á los del otro. 2.° que son tambien proporcionales los lados del primero á los del segundo.*

En los triángulos basta, segun hemos demostrado, la una

Fig. una de estas condiciones para que se verifique tambien la otra: pues si son iguales los ángulos, son proporcionales los lados (459), y si son proporcionales los lados, son iguales los ángulos (465).

103. 483 *Si desde dos ángulos homólogos* A *y* a *de dos polygonos semejantes, se tiran diagonales* AC, AD, *ac*, ad *á los demás ángulos, estarán divididos los dos polygonos en un mismo número de triángulos semejantes cada uno al suyo.*

Porque por el supuesto de ser los polygonos semejantes, el ángulo *B* es igual al ángulo *b*, y el lado *AB*: *ab* : : *BC* : *bc* : luego los dos triángulos *ABC*, *abc*, que tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales, son semejantes (464): luego el ángulo *BCA* es igual al ángulo *bca*, y *AC*: *ac* : : *BC*: *bc*.

Si de los ángulos iguales *BCD*, *bcd*, se quitan los ángulos iguales *BCA*, *bca*, los ángulos residuos *ACD*, *acd* serán iguales. Pero *BC* : *bc* : : *CD* : *cd* : luego ya que acabamos de probar que *BC* : *bc* : : *AC* : *ac*, tendrémos *CD* : *cd* : : *AC* : *ac* : luego los dos triángulos *ACD*, *acd* son tambien semejantes, porque tienen un ángulo igual á un ángulo formado por dos lados proporcionales. Lo mismo probarémos, y del mismo modo, respecto de los triángulos *ADE* y *ade*, y respecto de todos los triángulos que hubiese á mas de estos, si fuese mayor el número de los lados de cada polygono.

103. 484 *Si dos polygonos* ABCDE, abcde *constan de un*

Digitized by Google

un mismo número de triángulos semejantes, cada uno al su- Fig.
yo, y dispuestos del mismo modo, serán semejantes. 103.

Porque los ángulos *B* y *E* son iguales á los ángulos *b* y *e*, una vez que son semejantes los triángulos: y por la misma razon los ángulos parciales *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* son iguales á los ángulos parciales *bca*, *acd*, *cda*, *ade*: luego los ángulos totales *BCD*, *CDE* son iguales á los ángulos totales *bcd*, *cde*, cada uno al suyo. Fuera de esto, la semejanza de los triángulos nos dá esta série de razones iguales *AB* : *ab* : : *BC* : *bc* : : *AC* : *ac* : : *CD* : *cd* : : *AD* : *ad* : : *DE* : *de* : : *AE* : *ae*, tomando en esta série las razones cuyos términos son los lados de los dos polygonos, sale *AB* : *ab* : : *BC* : *bc* : : *CD* : *cd* : : *DE* : *de* : : *AE* : *ae* : luego estos polygonos tienen tambien los lados homólogos proporcionales : luego son semejantes.

485 Luego para *construir una figura semejante á una figura propuesta* ABCDE, *y que tenga por lado ho-* 103.
mólogo á AB, *una linea dada* a b, se llevará la linea dada sobre *AB*, desde *A* á *f*: por el punto *f* se tirará *fg* paralela á *BC*, y que encuentre *AC* en *g*: por el punto *g* se tirará *gh* paralela á *CD*, y que encuentre *AD* en *h*: finalmente por el punto *h*, se tirará *hi* paralela á *ED*, y saldrá el polygono *Afghi* semejante á *ABCDE*.

486 *Los contornos ó perímetros de dos figuras semejantes son entre sí como los lados homólogos de dichas figuras*: quiero decir, que la suma de los lados de la fi-

Digitized by Google

Fig. figura *ABCDE* contiene la suma de los lados de la
103. figura *abcde*, tanto como el lado *AB* contiene el lado *ab*.

Porque en la série de razones iguales *AB* : *ab* : : *BC* : *bc* : : *CD* : *cd* : : *DE* : *de* : : *AE* : *ae*, la suma de los antecedentes (190) es á la suma de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente : : *AB* : *ab*; pero es evidente que la suma de los antecedentes es el contorno de la figura *ABCDE*, y la suma de los consecuentes el contorno de la figura *abcde*.

487 Si imaginamos la circunferencia del círculo
106. *ABCDEFGH*, dividida en un número de partes iguales, el que se quisiere, y si tirando desde el centro *J*, á los puntos de division radios *JA*, *JB* &c. se traza con otro radio *Ja* la circunferencia *abcdefgh*, que encuentra dichos radios en los puntos *a*, *b* &c; es evidente que si en cada circunferencia juntamos los puntos de division con cuerdas, se formarán dos polygonos semejantes; porque los triángulos *ABJ*, *abJ* &c. son semejantes pues tienen un ángulo comun en *J* formado por dos lados proporcionales; porque ya que *JA* es igual á *JB* y *Ja* es igual á *Jb*, tenemos evidentemente *AJ* : *BJ* : : *aJ* : *bJ*, y lo propio se demuestra del mismo modo respecto de los demas triángulos.

De todo esto y de lo dicho antes (486) inferirémos que el contorno *ABCDEFGH* es al contorno *abcdefgh* : : *AB* : *ab*, ó (por causa de los triángulos se-

semejantes *ABJ*, *abJ*) : : *AJ* : *aJ*. Como esta semejanza no pende del número de los lados de estos dos polygonos, subsistirá igualmente aun quando el número de los lados de cada uno llegára á ser infinito. Pero en este caso hemos probado (444) que el círculo se confundirá con el polygono inscripto, ó que se puede tomar el uno en lugar del otro: luego *las circunferencias mismas* ABCDEFGH, abcdefgh *serán entre sí* : : AJ : aJ; *esto es, como sus radios; y por consiguiente como sus diámetros.* Fig. 106.

De las Superficies.

488 Llegamos yá á la segunda de las tres especies de estension que distinguimos al principio de estos Elementos; esto es, á la estension en longitud y latitud.

489 Antes de pasar adelante, conviene prevenir, que una *superficie curva* y una *superficie curvilinea* son dos cosas distintas. Yá dimos á entender (384) qué cosa es una figura ó superficie curva. Una superficie plana puede ser tambien curvilinea, bien que no pueda ser curva: un círculo, por egemplo, es una superficie curvilinea y plana al mismo tiempo.

Aquí nos proponemos considerar la superficie plana, y particularmente la que siendo terminada por lineas rectas se llama *rectilinea.*

Entre las figuras curvilineas solo considerarémos el círculo: y aunque son infinitas las mixtilineas, tratarémos solamente de las que tienen relacion con el círculo, quales

Digitized by Google

Fig. les son el segmento y el sector de círculo.

490 Llámase *segmento* de círculo el espacio comprehendido entre un arco y su cuerda. *ABCDA* es un segmento de círculo. El *sector* de círculo es el espacio
107. comprehendido entre un arco y dos radios. La figura *EFHG* es un sector de círculo.

Las superficies rectilineas que vamos á considerar, son el triángulo, el quadrilátero y el polygono. No pensamos en repetir aquí lo que hasta ahora hemos declarado respecto de estas figuras: porque en lo dicho hasta ahora no hemos atendido mas que al contorno, ámbito ó perímetro de dichas figuras, y ahora aplicarémos la consideracion al espacio que dicho perímetro incluye, que es propiamente lo que llamamos *superficie* ó *area.*

108. 491 *Un triángulo rectilineo qualquiera* ABC *es siempre la mitad de un paralelogramo de igual base y altura que él.*

Porque por el vértice del ángulo *C* podemos imaginar tirada una linea *CE* paralela al lado *BA*, y por el vértice del ángulo *A*, una linea *AE*, paralela al lado *BC*; de donde resulta con los lados *AB* y *BC* un paralelogramo *ABCE* de igual base y altura que el triángulo *ABC*, de cuyo paralelogramo es diagonal la linea *AC.* Pero hemos probado (426), que la diagonal de todo paralelogramo le divide en dos partes, ó triángulos iguales: luego cada uno de los dos triángulos *BAC* y *ACE* es la mitad del paralelogramo *ABCE*: luego el triángulo *ABC*

es

Digitized by Google

es la mitad del paralelogramo *ABCE*. Fig.

492 *Los paralelogramos* ABCD, EBCF *de igual* 109.
base y altura, son iguales en superficie.

Los dos paralelogramos *ABCD*, *EBCF* tienen comun la figura *EBCD*; así su igualdad pende de sola la igualdad de los triángulos *ABE*, *DCF*. Pero es facil probar que estos dos triángulos son iguales; porque *AB* es igual á *CD*, por ser estas lineas paralelas y comprehendidas entre paralelas (409); y por la misma razon *BE* es igual á *CF*; por otra parte (335) el ángulo *ABE* es igual al ángulo *DCF*: luego estos dos triángulos tienen un ángulo igual formado por dos lados iguales cada uno al suyo: luego son iguales: luego son tambien iguales el paralelogramo *ABCD* y el paralelogramo *EBCF*.

Del mismo modo demostraríamos que los dos triángulos *ABE*, *DCF* son iguales: luego restando de cada 110.
uno el triángulo *DJE*, los dos trapecios restantes *ABJD*, *EJCF* serán iguales: finalmente añadiendo á cada uno de estos trapecios el triángulo *BJC*, el paralelogramo *ABCD* y el paralelogramo *EBCF* que resultarán, serán iguales.

493 Podemos, pues, inferir que *los triángulos de igual base y altura, ó de bases y alturas iguales son iguales*; pues son mitades de paralelogramos de una misma base y una misma altura que ellos (491).

De la medida de las Superficies.

494 *Medir una superficie es determinar quantas veces*

Digitized by Google

Fig. *ces dicha superficie contiene otra superficie conocida.*

Las medidas que para esto sirven suelen ser quadrados: algunas veces se usa tambien de paralelogramos rectángulos: así medir la superficie *ABCD* es determinar quantos quadrados contiene como *abcd*, ó rectángulos como *a'b'c'd'*: si el lado *ab* del quadrado *abcd* es de un pie, es determinar quantos pies quadrados contiene la su-
111. perficie *ABCD*: si el lado *a'b'* del rectángulo *a'b'c'd'* fuese de un pie, y el lado *b'c'* de tres pies, sería determinar quantos rectángulos de un pie de largo y tres de ancho caben en la superficie *ABCD*.

Para medir en partes quadradas la superficie del rectángulo ABCD, *se ha de buscar quantas veces el lado* AB *contiene el lado* ab *del quadrado* abcd *que ha de servir de unidad ó de medida*: *buscar asimismo quantas veces el lado* BC *contiene* ab: *y multiplicando estos dos números uno por otro, saldrá el número de quadrados como* abcd, *que puede haber en la superficie* ABCD. Por egemplo, si *AB* contiene *ab* 4 veces, y si *BC* contiene *bc* 7 veces, multiplico 7 por 4, y el producto 28 expresa, que en el rectángulo *ABCD* hay 28 quadrados como *abcd*.

Porque si por los puntos de division *E*, *F*, *G*, se tiran paralelas á *BC*, resultarán quatro rectángulos iguales, cada uno de los quales podrá contener tantos quadrados como *abcd*, quantas partes iguales á *ab* hay en el lado *BC*: luego se han de repetir los quadrados contenidos en el uno de estos rectángulos tantas veces quantos rectángulos hay; es-

Digitized by Google

esto es, tantas veces como el lado *AB* contiene *ab*: y co- Fig.
mo el número de los quadrados contenidos en cada rectán- 111.
gulo es el mismo que el número de las partes de *BC*, es evidente, que multiplicando el número de las partes de *BC*, por el número de partes iguales de *AB*, sale el número de quadrados como *abcd* que puede contener el rectángulo *ABCD*.

Aunque hemos supuesto en el razonamiento que acabamos de hacer, que los lados *AB* y *BC* contienen un número cabal de veces *ab*, no por esto deja de aplicarse al caso en que la medida *ab* no cupiese un número de veces cabal en dichos lados. Por egemplo, si *BC* no contubiese sino $6\frac{1}{2}$ medidas, cada rectángulo no contendria sino $6\frac{1}{2}$ quadrados, y si el lado *AB* no contubiese sino $3\frac{1}{3}$ medidas, no habria sino $3\frac{1}{3}$ rectángulos, cada uno de $6\frac{1}{2}$ quadrados; se debería, pues, multiplicar $6\frac{1}{2}$ por $3\frac{1}{3}$: esto es, el número de medidas de *BC* por el número de medidas de *AB*.

495. Ya que (492) el paralelogramo rectángulo
ABCD es igual al paralelogramo *EBCF* de la misma 109.
base y altura, se sigue que, para hallar la superficie de 110.
este, se deberá multiplicar el número de las partes de su base *BC* por el número de las partes de su altura *BA*; se puede, pues, decir en general que

Para hallar el número de medidas quadradas contenidas en la superficie de un paralelogramo qualquiera ABCD *se debe medir la base* BC *y la altura* EF *con una misma medida, y multiplicar el número de las medidas de la base*

Fig. *por el número de las medidas de la altura.*

Se echa, pues, de ver, en virtud de lo dicho (494),
111. que quando se quiere valuar la superficie *ABCD* no se hace mas que repetir la superficie *GBCH* ó el número de los quadrados que contiene, tantas veces quantas su lado *GB* es contenido en el lado *AB*; así el multiplicando es en realidad una superficie, y el multiplicador es un número abstracto, que solo sirve para determinar quantas veces se ha de tomar dicho multiplicando.

Se dice no obstante muy comunmente, que *para hallar la superficie de un paralelogramo se debe multiplicar su base por su altura*; pero esto se debe mirar como un modo de hablar abreviado, en el qual se omite el número de los quadrados correspondientes á las partes de la base, y el número de las partes de la altura. En una palabra, no se puede decir que se multiplica una linea por una linea. Multiplicar es tomar cierto número de veces: de suerte, que quando se multiplica una linea, jamás puede salir otra cosa que una linea; y quando se multiplica una superficie, jamás puede salir otra cosa que una superficie. Una superficie no puede constar de otros elementos que superficies: y aunque se dice con frecuencia,
112. que el paralelogramo *ABCD* puede considerarse como compuesto de tantas lineas iguales y paralelas á *BC*, quantos puntos hay en la altura *EF*, se debe entender que estas lineas tienen una latitud infinitamente pequeña (porque muchas lineas sin latitud ninguna no pueden formar una

una superficie): y entónces cada una de dichas lineas es Fig.
una superficie, que tomada tantas veces quantas su altura cabe en la altura EF, dá la superficie $ABCD$.

Usarémos no obstante de esta espresion: *multiplicar una linea por una linea*; pero conviene tener presente que será solo para abreviar. Añadirémos que *el producto de dos lineas espresa una superficie*: bien que, hablando con exactitud, debería decirse el número de las partes de una linea multiplicado por el número de las partes de otra linea, espresa el número de partes quadradas contenidas en el paralelogramo que tubiese la una de dichas lineas por altura, y la otra linea por base.

En conformidad de esto, para representar la superficie del paralelogramo $ABCD$, escribirémos $BC \times EF$: en 112.
la figura 111 escribiríamos $BC \times AB$: y en la figura 113, cuyos dos lados AB y BC son iguales, en lugar de $AB \times BC$ ó $AB \times AB$ escribirémos $\overline{AB}^2$ ó $(AB)^2$: de suerte que $\overline{AB}^2$ espresará la linea AB multiplicada por sí misma, ó la superficie del quadrado construido sobre la linea AB: si quisiéramos representar que la linea AB está levantada al cubo, escribiríamos $\overline{AB}^3$ ó $(AB)^3$, que es lo mismo que $AB \times AB \times AB$ ó $\overline{AB}^2 \times AB$.

496 De lo que acabamos de decir resulta, que á fin de que dos paralelogramos sean iguales en superficie, basta que el producto de la base del uno multiplicada por la altura, sea igual al producto de la base del segundo multiplicada por su altura: luego *quando dos paralelogramos son*

Digitized by Google

Fig. *iguales en superficie, tienen sus bases reciprocamente proporcionales á sus alturas*; esto es, que la base y la altura del uno pueden considerarse como los estremos de una proporcion, de la qual la base y la altura del otro serian los medios, porque considerándolos así, el producto de los estremos es igual al producto de los medios, en cuyo caso hay necesariamente proporcion.

Pero puede percibirse inmediatamente esta verdad, considerando que si la base del uno es menor, por egemplo, que la del otro, es menester que sea su altura mayor en proporcion para que salga el mismo producto.

497 Ya que un triángulo es la mitad de un paralelógramo de una misma base y altura (491), se infiere de lo que acabamos de decir (495), que *para hallar la superficie de un triángulo, se ha de multiplicar la base por la altura y tomar la mitad del producto.*

498 Y como es lo mismo tomar la mitad del producto espresado, que multiplicar la base por la mitad de la altura ó la altura por la mitad de la base, resulta que *se hallará la superficie de un triángulo qualquiera, multiplicando su base por la mitad de su altura.*

499 No hay duda en que si por cada punto de la linea *AB* concebimos tiradas lineas paralelas á la base *CD*, estas lineas llenarán toda la superficie del triángulo *ACD*,
114. de manera que la superficie de esta figura será igual á la suma de todas estas paralelas. Pero estas lineas forman una progresion arismética (449), que empieza por cero,
pues

pues en *A* empieza solo por un punto y no por una linea: Fig.
luego siendo lo propio la superficie de estas lineas que la superficie del triángulo, y siendo esta superficie igual al producto de *CD* por la mitad de *AB*; se infiere, que *para hallar la suma de todos los términos de una progresion arismética que empieza por cero, se ha de multiplicar el término mayor por la mitad de la suma de todos los términos.*

500 De la práctica enseñada arriba (498) resulta 1.° *que para hallar la superficie de un trapecio es menester sumar los dos lados paralelos, tomar la mitad de la suma, y multiplicarla por la perpendicular tirada entre las dos paralelas.*

Porque si se tira la diagonal *BD* salen dos triángu- 115.
los *ABD*, *BDC*, cuya altura comun es *EF*. Para hallar la superficie del triángulo *ABD* se debería, pues, multiplicar la mitad de *AD* por *EF*; y para sacar la superficie del triángulo *BDC* se debería multiplicar la mitad de *BC* tambien por *EF*: luego la superficie del trapecio vale la mitad de *AD* multiplicada por *EF*, mas la mitad de *BC* multiplicada por *EF*; esto es, la mitad de la suma *AD* mas *BC*, multiplicada por *EF*.

Si por el medio *G* de la linea *AB* se tira *GH* paralela á *BC*, esta linea *GH* será la mitad de la suma de las dos lineas *AD* y *BC*. Porque sea *J* el punto donde *GH* corta la diagonal *BD*, los triángulos *BAD*, *BGJ*, semejantes por causa de las paralelas *AD* y *GJ*, manifies-

Digitized by Google

Fig. tan que (459) *GJ* es la mitad de *AD*, pues *BG* es
115. la mitad de *AB*. Pero como *GH* es paralela á *BC* y á *AD*, *DC* está cortada (451) del mismo modo que *AB*; probarémos, pues, del mismo modo que *JH* es la mitad de *BC*, considerando los triángulos semejantes *BDC* y *JDH*.

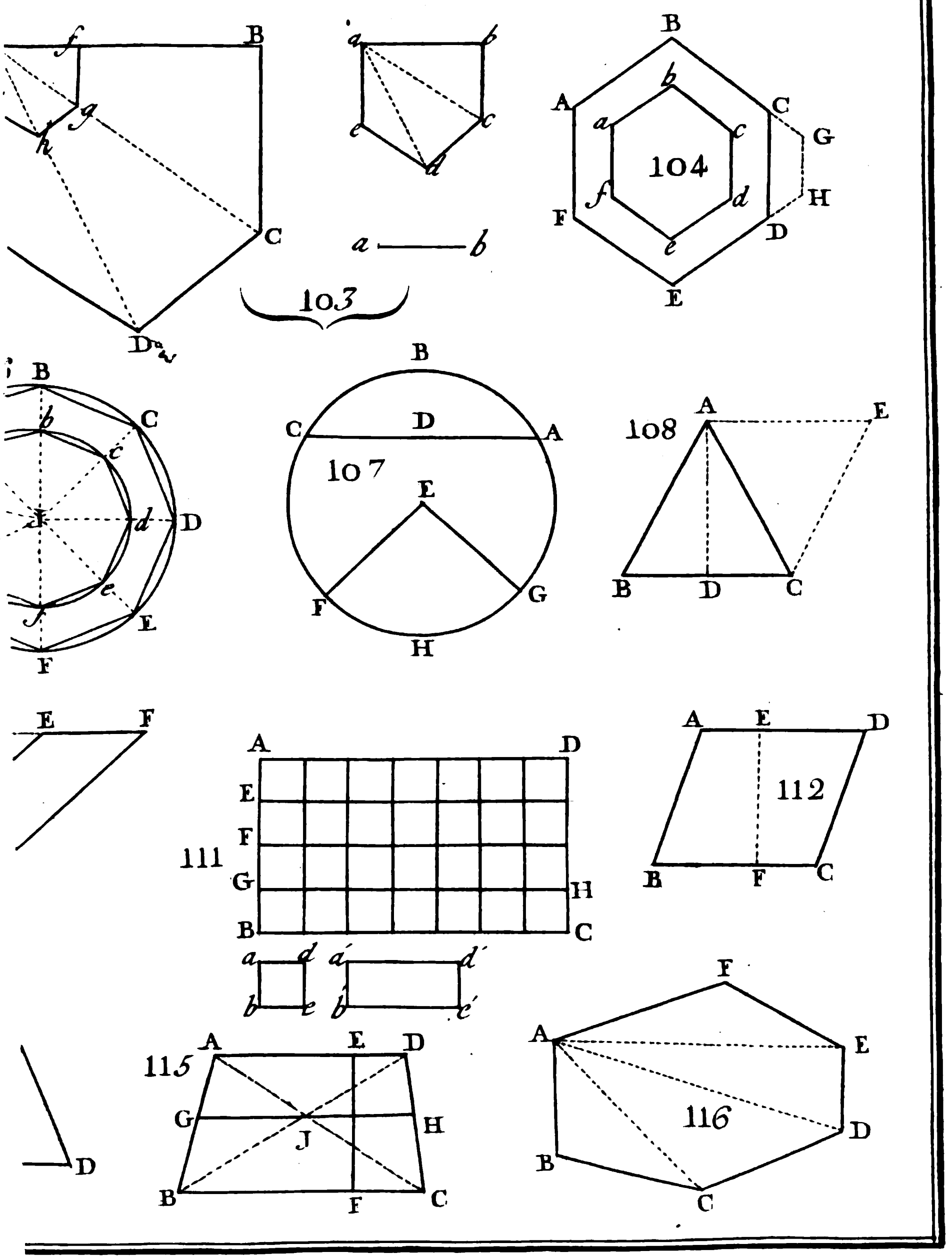
Luego, y en virtud de lo dicho antes podemos afirmar que *la superficie de un trapecio* ABCD *es igual al producto de su altura* EF, *por la linea* GH *tirada á distancias iguales de las dos bases opuestas.*

501 2.° Para *hallar la superficie de un polygono qualquiera* se le dividirá en triángulos por lineas tiradas desde un mismo punto á cada uno de sus ángulos, y se calculará separadamente la superficie de cada uno de estos triángulos: sumando todos estos productos, saldrá la superficie total del polygono. Pero á fin de que sea el menor que se pueda el número de los triángulos, convendrá tirar todas estas lineas desde uno de los ángulos, como en
116. el polygono *ABCDEF*.

117. 502 *La superficie de un polygono regular* ABCDE *circunscripto á un círculo, es igual al producto del radio por la mitad del perímetro.*

Tírense desde el centro *F* lineas como *FA*, *FB* &c. á los ángulos del polygono, cuyas lineas dividirán el polygono en tantos triángulos, como lados tiene. Tienen todos estos triángulos una misma altura igual al radio comun ó al apotema *FG*, tirado al punto de contacto, por ser perpendicular á la tangente (346) todo radio ti-

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

tirado al punto de contacto. Pero qualquiera de los triángulos como *DFC* es igual al producto de la mitad del lado *DC*, que es su base, por el radio *FG*, que es su altura. Luego la suma de los triángulos ó el polygono circunscripto es igual al producto de la mitad de todos los lados, esto es, de la mitad del perímetro por el radio. Fig. 117.

503 Lo mismo es multiplicar la mitad del perímetro del polygono regular por su apotema, que multiplicar la mitad del apotema por todo el perímetro. Y como la superficie de un triángulo, cuya base fuese el perímetro de un polygono regular dado, y la altura la misma que la del apotema de dicho polygono, sería igual (498) al producto de su base por la mitad de su altura; resulta que *la superficie del polygono regular será con efecto igual á la de un triángulo que tubiese por base el perímetro del polygono, y por altura la de su apotema.*

Y como no se distingue la circunferencia de un círculo (444) del perímetro de un polygono regular de una infinidad de lados, tambien *será la superficie de un círculo igual al producto de su perímetro ó circunferencia por la mitad del radio, ó á la superficie de un triángulo cuya base fuese igual al perímetro del círculo y la altura la misma que el radio.*

Porque el radio de un círculo qualquiera no discrepa del apotema del polygono regular de una infinidad de lados, en el qual se le puede suponer inscripto.

504 Ya que las circunferencias de los círculos son

 en-

entre sí como los radios ó como los diámetros (487), es evidente, que si conociesemos la circunferencia de un círculo de diámetro conocido, se podria determinar la circunferencia de otro círculo, cuyo diámetro fuese tambien conocido, pues no habria mas que calcular el quarto término de esta proporcion: *el diámetro de la circunferencia conocida es á esta misma circunferencia, como el diámetro de la circunferencia que se pide es á esta segunda circunferencia.*

No se conoce exactamente la razon del diámetro á la circunferencia; pero se conoce un valor tan aproximado, que una razon mas exacta puede considerarse como de todo punto inutil en la práctica.

Pedro Mecio halló, que la razon del diámetro á la circunferencia es la de 113 á 355. Pero nosotros probarémos á su tiempo, que el diámetro es á la circunferencia : : 1 : 3,14159265358979 32, cuya aproximacion han continuado algunos hasta ciento y veinte y siete decimales.

Muchos siglos antes habia ya hallado Arquimedes que un círculo cuyo diámetro fuese de 7 pies, tendria 22 pies de circunferencia, con muy poca diferencia. Así si se pide qual será la circunferencia de un círculo cuyo diámetro coge 20 pies, se ha de buscar el quarto término de la proporcion, cuyos tres primeros son

$$7 : 22 :: 20 :$$

Este quarto término que es $62\frac{6}{7}$ es con muy corta diferencia la longitud de la circunferencia de un círculo de 20 pies de diámetro. Usando de la razon de 7 : 22, se puede de escusar formar la proporcion : basta triplicar el diámetro, y añadir al producto la séptima parte del mismo diámetro; porque $3\frac{1}{7}$ es el número de veces que 7 cabe en 22. Fig.

Ya es facil hallar la superficie de un círculo propuesto, á lo menos con una exactitud suficiente respecto de lo que se necesita para la práctica.

Si se preguntase de quántos pies quadrados sería la superficie de un círculo que tubiese 20 pies de diámetro, calcularé su circunferencia por el método arriba declarado, y hallaré que es de $62\frac{6}{7}$ pies. Multiplicaré, pues, $62\frac{6}{7}$ por 5, que es la mitad del radio (503), y hallaré $314\frac{2}{7}$ pies quadrados, valor de la superficie de dicho círculo.

505 Ya que se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados (444), un sector de círculo se puede considerar como una porcion de polygono regular, y su superficie como compuesta de una infinidad de triángulos, que todos tienen su vértice en el centro, y por altura el radio: luego *para hallar la superficie de un sector de círculo* CFHGC, *se ha de multiplicar el arco que le sirve de base, por la mitad del radio.* 118.

Por lo que mira al segmento *FHGF*, es evidente que *para hallar su superficie, se debe restar la superficie del triángulo* FCG *de la del sector* CFHGC.

Es evidente, que en un mismo círculo las longitudes de los arcos son proporcionales al número de sus grados: que por consiguiente quando se conoce la longitud de la cir-

Digitized by Google

Fig. circunferencia, se puede *hallar la de un arco de un número de grados qualquiera*, haciendo esta proporcion 360° *son al número de grados del arco, cuya longitud se busca, como la longitud de la circunferencia es á la del mismo arco.*

Si se tratase *de buscar la superficie de un sector, conociendo el número de grados de su arco y el radio*, se buscará por medio de la proporcion que acabo de dar la longitud del arco que sea la base del sector propuesto, y se la multiplicará por la mitad del radio. Supongamos que se me pregunte qual es la superficie de un sector de 32° 40′ en un círculo que tiene 20 pies de diámetro: hallaré, como ántes (504), que la circunferencia es de $62\frac{6}{7}$ pies: buscando el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son 360° : 32° 40′ :: $62\frac{6}{7}$: este quarto término, que se hallará ser $5\frac{19}{27}$ será la longitud del arco de 32° 40′, que multiplicada por 5, mitad del radio, dá $28\frac{14}{27}$ para la superficie del sector de 32° 40′.

118. Hecho esto, es muy facil *hallar la superficie del segmento*, determinando el lado *FG* y la altura *CD* del triángulo *FCG*, por una operacion fundada en las proposiciones que sentamos antes (459, 464 y 465).

506 Sería muy facil hallar la superficie de la co-
119. rona *X*, buscando la superficie del círculo, cuyo radio es *DG*, la superficie del círculo cuyo radio es *DE*, y restando la primera de la segunda, sería la resta la superficie de la corona *X*.

Pero darémos mas adelante un método mas breve para he-

Digitized by Google

hallar la superficie de una corona ó ánulo qualquiera. Fig.

De la comparacion de las Superficies.

507 *Las superficies de los paralelogramos son entre sí generalmente como los productos de sus bases por sus alturas.*

Quiero decir, que la superficie de un paralelogramo contiene la de otro paralelogramo, tanto como el producto de la base del primero por su altura contiene el producto de la base del segundo por su altura. Y en esto no hay duda alguna, pues todo paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

De donde hemos de inferir, que *quando dos paralelogramos tienen una misma altura, son entre sí como sus bases: y que quando tienen la misma base, son entre sí como sus alturas.*

Porque no mudará la razon de los productos, porque se omita en cada uno el factor que tubiéren comun (202).

508 Ya que los triángulos son mitades (491) de los paralelogramos de una misma base y altura que ellos, hemos de inferir, que *los triángulos que tienen una misma altura son entre sí como sus bases: y que los triángulos son entre sí como sus alturas, quando tienen unas mismas bases, ó bases iguales.*

509 *Las superficies de los paralelogramos ó de los triángulos semejantes, son entre sí como los quadrados de sus lados homólogos.*

Por-

Digitized by Google

Fig. 120. Porque las superficies de los paralelogramos *ABCD* y *abcd* son entre sí (507) como los productos de sus bases por sus alturas: esto es, *ABCD* : *abcd* : : *BC* × *AE* : *bc* × *ae*. Pero si los paralelogramos *ABCD*, *abcd* son semejantes, y si *AB* y *ab* son dos lados homólogos, los triángulos *AEB*, *aeb* serán semejantes (460), porque además del ángulo recto en *E* y *e*, han de tener tambien el ángulo *B* igual al ángulo *b*: tendrémos, pues *AE* : *ae* : : *AB* : *ab*, ó : : *BC* : *bc*, por ser semejantes los paralelogramos: podemos, pues (200), en los productos *BC* × *AE* y *bc* × *ae*, substituir la razon de *BC*: *bc* en lugar de la de *AE* : *ae*; y entónces la razon de estos productos será la de $(BC)^2 : (bc)^2$; luego *ABCD*: *abcd*: : $(BC)^2 : (bc)^2$; y como es lícito tomar por base el lado que se quisiere, queda probado que en general las superficies de los paralelogramos semejantes son entre sí como los quadrados de sus lados homólogos.

510 Por lo que toca á *los triángulos semejantes, es evidente que tienen la misma propiedad*, pues son mitades de paralelogramos de la misma base y altura que ellos, y tienen entre sí las mitades la misma razon que los todos.

511 *En general, las superficies de dos figuras semejantes qualesquiera, son entre sí como los quadrados de los lados ó de las lineas homólogas de dichas figuras.*

Porque las superficies de dos figuras semejantes se pueden siempre considerar (483) como compuestas de un mismo número de triángulos semejantes cada uno al su-

yo;

yo; entónces la superficie de cada triángulo de la primera Fig.
figura será á la del triángulo correspondiente en la segunda, como el quadrado de un lado del primero es al quadrado del lado homólogo del segundo (510): luego ya que estando en la misma razon todos los lados homólogos, sus quadrados han de estar tambien en la misma razon (198), cada triángulo del primer polygono será al triángulo correspondiente del segundo, como el quadrado de un lado qualquiera del primer polygono, es al quadrado del lado homólogo del segundo: luego (190) la suma de todos los triángulos del primero será á la suma de todos los triángulos del segundo, ó la superficie del primero á la superficie del segundo, tambien en la misma razon.

512 *Son, pues, entre sí las superficies de los círculos como los quadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Porque son los círculos figuras semejantes (487) cuyos radios y diámetros son lineas homólogas.

Lo propio debe entenderse de los sectores y segmentos de igual número de grados.

Se echa, pues, de ver que no sucede lo mismo en las superficies de las figuras semejantes que en sus contornos: los contornos siguen la razon simple (486) de los lados; quiero decir, que de dos figuras semejantes, si un lado de la una es duplo ó triplo &c. de un lado homólogo de la otra, el contorno de la primera será tambien duplo, triplo &c. del contorno de la otra; pero no sucede lo propio

Digitized by Google

Fig. pio en las superficies: la de la primera figura sería en este caso quatro veces, nueve veces &c. mayor que la primera.

Puede hacerse patente esta verdad considerando, que
121. el paralelogramo $ABCD$, cuyo lado AB es duplo del lado AG del paralelogramo semejante $AGJE$, contiene quatro paralelogramos de todo punto iguales á este; y el trián-
122. gulo ADF, cuyo lado AD es duplo del lado AB del triángulo semejante ABC, contiene quatro triángulos iguales á este: asimismo el triángulo AGK, cuyo lado AG es triplo de AB, contiene nueve triángulos iguales á ABC. Lo mismo probaríamos respecto de los círculos: *un círculo que tubiese un radio duplo ó triplo ó quádruplo &c. del radio de otro círculo, tendrá 4 veces ó 9 veces ó 16 veces &c. tanta superficie como este.*

513 Si se quisiese, pues, construir una figura semejante á otra, y cuya superficie tubiese con la de esta una razon dada, por egemplo la razon de 3 á 2, no se deberian hacer los lados homólogos en la razon de 3 á 2, porque entónces serian las superficies como 9 á 4; pero se deberian hacer estos lados de tal cantidad que fuesen entre sí sus quadrados :: 3 : 2 : esto es, suponiendo que el
123. lado AB de la figura X sea de 50^{p}, por egemplo, se deberia, para hallar el lado homólogo ab de la figura x que se busca, calcular el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros serian $3 : 2 :: (50)^2$ ó 50×50 es á un quarto término: este quarto término, que es

$1666\frac{2}{3}$

$1666\frac{2}{3}$ sería el quadrado del lado *ab*: por lo que sacando la raiz quadrada (151) de $1666\frac{2}{3}$, saldrán 40^{p}, 824: esto es, $40^{p}\ 9^{p}\ 10^{l}$ con poca diferencia para el lado *ab*. Conociendo el valor de un lado de la figura *x*, es facil construir esta figura en virtud de lo dicho (484). Fig.

514 *Si un quadrado y un pentágono fuesen ambos regulares é isoperímetros, el que mayor número de lados tubiere, será mayor en superficie: quiero decir, que en general de las figuras regulares isoperímetras aquella tiene mayor superficie que mas lados tiene.* 124.

Porque si inscribimos un círculo en cada una de las dos figuras propuestas, y tiramos los radios *CA* y *CB*, el pentágono será igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio *CB* (502), y el quadrado será tambien igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio *CA*: ya que los perímetros son iguales por la suposicion, el pentágono y el quadrado son entre sí como los radios *CB* y *CA*. Pero el radio *CB* es mayor que el radio *CA*; porque si fuesen iguales estos dos radios, sus dos círculos lo serian tambien: y por consiguiente el perímetro del pentágono sería menor que el perímetro del quadrado, porque de todos los polygonos regulares circunscriptos á círculos iguales, el que mayor número de lados tiene, tiene menor perímetro (443). Pero son iguales, segun suponemos, los perímetros del pentágono y del quadrado: luego el círculo del pentágono ha de ser mayor

que

Fig. que el del quadrado: luego el radio CB es mayor que
124. CA: luego la superficie del pentágono es mayor que la del quadrado.

Lo propio se probará por el mismo camino respecto de otros dos polygonos regulares isoperímetros, de los quales el uno tubiese mas lados que el otro.

515 Luego *ya que el círculo es un polygono de una infinidad de lados* (444) *contiene mas superficie que otra qualquiera figura, cuyo perímetro es igual.*

516 Conviene reparar, que *si un quadrado y un rectángulo oblongo son isoperímetros, el quadrado será mayor que el rectángulo.*

Supongamos, por egemplo, un quadrado cuyos lados son cada uno de 10 varas, y un rectángulo cuya base sea de 15 varas y el lado perpendicular á la base tenga 5, el perímetro del quadrado será de 40 varas, y lo será tambien el del rectángulo; sin embargo contendrá el quadrado 100 varas quadradas de area, y el rectángulo no contendrá sino 75.

De donde se debe inferir que *entre los rectángulos oblongos isoperímetros, los que mas se arriman á la figura del quadrado son mayores que los otros*: por egemplo, un rectángulo cuya base es de 12 varas, y el lado de 8, es mayor que el otro de que hemos hablado, aunque son iguales sus perímetros. Y de esto se echa de ver, que dos piezas de tierra como dos huertas pueden ser desiguales, bien que los contornos de las cercas sean iguales.

Si

Digitized by Google

517 *Si sobre los tres lados* AB, BC, AC *de un triángulo rectángulo* ABC *se construyen tres quadrados* BEFA, BGHC, AJLC: *el quadrado formado sobre la hypotenusa será igual á la suma de los quadrados formados sobre los otros dos lados.* Fig. 125.

Bagese desde el ángulo recto *B* á la hypotenusa *AC* la perpendicular *BD*; los dos triángulos *BDA*, *BDC* serán cada uno semejantes al triángulo *ABC* (463): y por consiguiente las superficies de estos tres triángulos serán entre sí como los quadrados de sus lados homólogos; tenemos, pues, esta série de razones iguales $ABD : (AB)^2 :: BDC : (BC)^2 :: ABC : (AC)^2$, ó $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AJLC$; luego (189) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AJLC$. Pero es evidente que *ABC* vale las dos partes $ABD + BDC$; luego *AJLC* vale $ABEF + BGHC$, que podemos señalar tambien de este otro modo $(AC)^2$ vale $(AB)^2 + (BC)^2$.

518 Ya que el quadrado de la hypotenusa vale la suma de los quadrados de los dos lados del ángulo recto, inferiremos, que *el quadrado del uno de los lados del ángulo recto vale el quadrado de la hypotenusa menos el quadrado del otro lado; esto es, que* $(BC)^2$ *vale* $(AC)^2 - (AB)^2$, *y* $(AB)^2$ *vale* $(AC)^2 - (BC)^2$.

519 Y pues el quadrado de la hypotenusa vale la suma de los quadrados de los lados del ángulo recto, se infiere que si el triángulo rectángulo es isósceles, como sucede, por egemplo, en un quadrado quando se tira la dia-

V go-

Fig. gonal *AC*, el quadrado de la hypotenusa será duplo del
126. quadrado del uno de sus lados: luego la superficie de un quadrado es á la superficie del quadrado construido sobre la diagonal, como 1 es á 2: luego (199) el lado de un quadrado es á su diagonal, como 1 es á la raiz quadrada de 2: y como esta raiz no puede hallarse exactamente en números, se infiere que *no se puede espresar exactamente en números la razon del lado de un quadrado á su diagonal*; *esto es, que la diagonal es inconmensurable, ó no tiene medida alguna comun con su lado.*

520 Ya podemos declarar el método que ofrecimos (506) para *medir la superficie de una corona* X,
127. cuyo método consiste en buscar una media proporcional *GH* (475) entre las partes *EG*, *GF* del diámetro del círculo mayor: y la superficie del círculo cuyo radio fuere dicha media proporcional, será igual á la superficie de la corona.

Porque siendo la media proporcional *GH* perpendicular en el punto *G*, será rectángulo el triángulo *DGH*. Pero de la propiedad del triángulo rectángulo (518) resulta, que al círculo del radio *DG* le falta el círculo del radio *GH* para que sea igual al círculo cuyo radio fuere *DH* ó *DE*: y como al círculo cuyo radio fuere *DG* le falta cabalmente la corona *X* para ser igual al círculo cuyo radio fuere *DE*, se infiere que el círculo cuyo radio fuere *GH* es igual á la superficie de la corona *X*.

521 En la demostracion del núm. 517 hemos visto

to como la semejanza de los triángulos *ABC*, *ADB*, *CDB* Fig.
dá $ABC : (AC)^2 :: ADB : (AB)^2 :: BDC : (BC)^2$; pero los 125.
triángulos *ABC*, *ADB*, *BDC* tienen todos tres una misma altura, son por consiguiente entre sí (508) como sus bases: luego $ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC$; luego *el quadrado formado sobre la hypotenusa es á cada uno de los quadrados formados sobre los otros dos lados, como la hypotenusa es á cada uno de los segmentos correspondientes á dichos lados.*

522 En esto podemos fundar un método para formar con lineas lo que hicimos con números (513); esto es, un método para *construir una figura x semejante á una figura propuesta* X, *y cuya superficie sea respecto* 123.
de la de esta en una razon dada.

Tírese una linea indefinita *DE*, en la qual se toma- 128.
rán las dos partes *DP* y *PE* tales, que *DP* sea á *PE* como la superficie de la figura dada *X* ha de ser á la de 123.
la otra figura *x*; esto es :: 3 : 2, si se quiere que sea
x los $\frac{2}{3}$ de *X*. Sobre *DE* como diámetro se trazará el se- 128.
micírculo *DBE*; y levantando en el punto *P* la perpendicular *PB*, se tirarán desde el punto *B* donde encuentra la circunferencia, á los dos estremos *D* y *E*, las cuerdas *BD*, *BE*. Sobre *DB* se tomará *BA* igual á un lado *AB* de la figura *X*, y tirando *AC* paralela á *DE*, será *BC* el lado homólogo de la figura *x*, que se construirá despues segun enseñamos (485).

La razon es esta: la superficie de la figura *X* ha de

Fig. ser á la de la figura x, como el quadrado del lado AB es al quadrado del lado que buscamos ab, esto es $:: (AB)^2 : (ab)^2$; y como tambien se quiere que estas superficies sean la una á la otra $:: 3 : 2$; es preciso que $(AB)^2 : (ab)^2 :: 3 : 2$. Pero $AB : BC :: BD : BE$, y por consiguiente (198) $(AB)^2 : (BC)^2 :: (BD)^2 : (BE)^2$; y como el triángulo DBE es rectángulo (376), tenemos (521) $(BD)^2 : (BE)^2 :: DP : PE$; esto es, como $3 : 2$; luego tambien $(AB)^2 : (BC)^2 :: (AB)^2 : (ab)^2$; luego ab ha de ser igual á BC.

523 Infiérese de lo que acabamos de probar (521)
129. que los *quadrados de las cuerdas* AC, AD &c. *tiradas desde el estremo de un diámetro* AB *son entre sí como las partes* AP, AO *que cortan en dicho diámetro las perpendiculares bajadas desde los estremos de dichas cuerdas.*

Porque tirando las cuerdas BC y BD, tendremos (521) en el triángulo rectángulo ACB;

$$(AB)^2 : (AC)^2 :: AB : AP;$$

y en el triángulo rectángulo ADB;

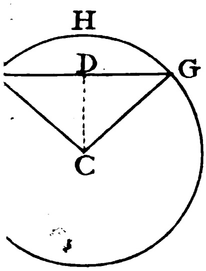
$$AD^2 : AB^2 :: AO : AB;$$

luego (201) $(AD)^2 : (AC)^2 :: AO : AP$.

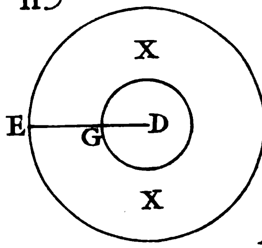
De los Planos.

524 Sentados los métodos para medir y averiguar las razones de las superficies planas, no nos falta, para poder tratar de los sólidos, sino considerar las propiedades de las lineas rectas en sus diferentes situaciones respecto de los planos, y las de los planos en sus diferentes si-

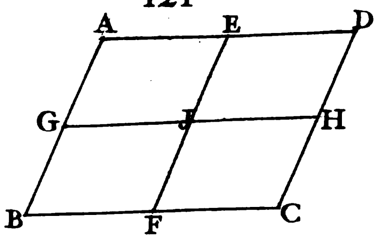
Digitized by Google



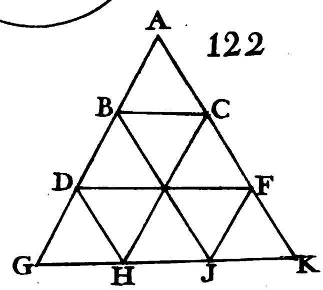
119

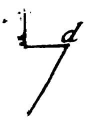


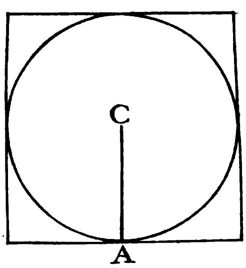
121



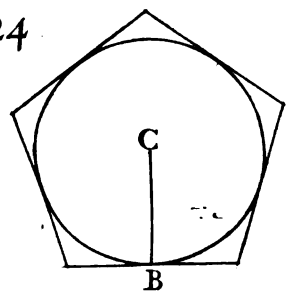
122



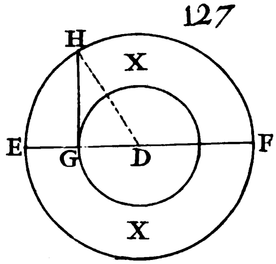




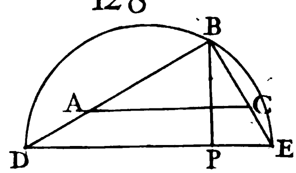
124



127



128



Digitized by Google

Digitized by Google

situaciones respecto los unos de los otros: este es el ásunto que llama ahora nuestra atencion. Fig.

A los planos de que vamos á tratar no les suponemos ni magnitud, ni figura alguna determinada: les supondremos estensos indefinitamente segun todas las direcciones: y si les damos las figuras que representan las láminas, es con sola la mira de aliviar la fantasía.

525 Dícese de una linea *AB* que *es perpendicular á un plano*, quando no se inclina ácia lado alguno de dicho plano. De lo que se infiere que una linea que es perpendicular á un plano, lo es tambien á todas las lineas que encuentra en dicho plano. Así si *AB* es perpendicular al plano *X*, lo es tambien á las dos lineas *CD*, *EF*; y son por consiguiente rectos los ángulos *ABC*, *ABD*, *ABE*, *ABF*. 130.

526 *Desde un punto* B *tomado en el plano* X *no se puede levantar mas que una perpendicular á dicho plano.*

Porque si la linea *AB* es perpendicular al plano, la linea *OB* será obliqua por precision; pues teniendo esta linea sus puntos entre el plano y la perpendicular *AB*, es indispensable que se incline ácia alguno de los lados del plano. 130.

527 *Tampoco se puede tirar desde un punto fuera de un plano mas que una perpendicular á dicho plano.*

Por lo que, si *AB* es perpendicular al plano *X*, *AG* será obliqua; pues si imaginamos tirada la linea *BG*, resultará el triángulo *ABG*, cuyo ángulo *B* será recto, por ser, segun suponemos, la linea *AB* perpendicular al pla-

Digitized by Google

Fig. no : por consiguiente será agudo el ángulo *G* : luego la li-
130. nea *AG* está inclinada ácia *B*.

528 El ángulo *AGB* que forma la obliqua *AG* con la linea *BG* que encuentra la perpendicular, es la medida de la inclinacion de la linea *AG* respecto del plano.

529 Dícese de un plano que es *perpendicular* á otro, quando le corta de manera que no se inclina ácia lado alguno : y se dice de un plano que es *obliquo* respecto de otro , quando se le inclina por algun lado.

530 Llamamos *comun seccion* de dos planos la linea donde se encuentran , concurren ó se cortan mutuamente
131. dichos planos : tal es la linea *EF* respecto de los planos *T* y *S*.

531 Si desde un mismo punto *L* de la comun seccion de dos planos se tiran las dos lineas *LG* , *LH* , la una en el plano *S*, la otra en el plano *T* , ambas perpendiculares á la comun seccion *EF*, el ángulo *GLH* que formarán , será la medida de la inclinacion de los dos planos, si formaren uno con otro un ángulo agudo ; pero si formaren un ángulo recto , los dos planos serán perpendiculares el uno al otro.

132. 532 *Si una linea* AB *fuere perpendicular al plano* X, *y otro plano* Y *pasare por la linea* AB , *cogiendola , será el plano* Y *perpendicular al plano* X.

Porque tirando desde el punto *B* en el plano *X* una linea *BC* perpendicular á la comun seccion *EF* de los dos planos , la linea *AB* será perpendicular á *BC* y á *EF* (525), por

Digitized by Google

por ser perpendicular al plano *X* : luego el ángulo *ABC* será recto. Pero este ángulo determina la situacion de los dos planos : luego serán perpendiculares el uno al otro. Fig. 132.

533 *Una linea recta no puede estar parte en un plano y parte fuera de él* : quiero decir, *que una linea recta* AB *en el plano* X, *y una linea recta* BC *fuera de dicho plano no son una sola y misma linea.* 133.

Levántese desde el punto *B* en el plano *X* una perpendicular *BE* á la linea *AB*, y una perpendicular *BD* á la linea *BE*. La suma de los ángulos *EBA* y *EBD* es igual á la suma de dos ángulos rectos. Así (301) las lineas *BA* y *BD* tiradas desde el mismo punto *B* de la linea recta *BE* componen una sola recta *ABD*; y por consiguiente, las lineas *AB* y *BC* no son una sola linea recta. Lo mismo se probaria aunque pasare la linea *BC* mas cerca ó mas lexos de la *AB*.

534 *Lo propio digo de un plano respecto de otro.*

Porque si se tirase una linea recta en la parte plana comun á los dos planos, se podria prolongar en el uno y en el otro, y tendria parte en uno de los dos planos, y la parte que estubiese en el otro plano estaria mas alta ó mas baja; lo que no puede ser, segun acabamos de probar (533).

535 *Dos lineas* AB, CD *que se cortan estan en un mismo plano.* 134.

Para probarlo tírese desde un punto qualquiera *A* de la linea *AB* á un punto qualquiera *D* de la linea *CD*, una linea recta *AD*. Es evidente que la parte *AE* está

Digitized by Google

Fig. en el plano del triángulo *AED*, pues es el uno de los lados de dicho triángulo; por la misma razon la parte *DE* está tambien en el plano del triángulo *AED*; luego las lineas *AB*, *CD*, tienen cada una una parte en un mismo plano: luego (533) están todas en un mismo plano.

132. 536 *La interseccion ó seccion comun* EF *de dos planos* X *é* Y *que se cortan, es una linea recta.*

Porque la linea *EF* pertenece á ambos planos, por ser su comun seccion. Pero por ser linea del plano *X* no puede tirar ni ácia arriba, ni ácia abajo, porque en qualquiera de estos dos casos se saldría del plano *X*; y en quanto es linea del plano *Y*, no puede desviarse ni á la derecha, ni á la izquierda: luego la linea *EF* no se tuerce ácia lado alguno: luego es recta.

130. 537 *Si la una linea* AB *levantada sobre el plano* X *fuere perpendicular á las dos lineas* BC, BE, *que están en dicho plano, será tambien perpendicular al plano.*

Prolónguense las lineas *BC*, *BE* ácia *B*, y tómense en sus prolongaciones las partes *BD*, *BF* iguales á las lineas *BC* y *BE*, que supongo iguales entre sí. Ya que *AB* es perpendicular á *CD*, y que el punto *B* está á igual distancia de los puntos *C* y *D*, el estremo *A* está tambien á igual distancia de dichos puntos (307). Por la misma razon el estremo *A* está á igual distancia de los puntos *E* y *F*: luego la linea *AB* es perpendicular al plano.

538 Luego *si una linea levantada sobre un plano es per-*

Digitized by Google

perpendicular á dos lineas de dicho plano, será tambien perpendicular á todas las lineas que encontráre del plano; porque una vez que es perpendicular al plano, lo será tambien á todas las lineas que encontrare del plano (525). Fig.

539 *Si un plano* Y *fuese perpendicular á otro plano* X, *y se tira en el uno, por egemplo en el plano* Y, *una linea* AB *perpendicular á la comun seccion* EF, *dicha perpendicular lo será tambien al otro plano* X. 132.

Imaginemos una linea *CBD* perpendicular al plano *Y*, y puesta en el plano *X*, será perpendicular á la linea *AB*, que está en el plano *Y* (525). Y recíprocamente *AB* será perpendicular á *CD*: fuera de esto, tambien suponemos que *AB* es perpendicular á *EF*: luego es perpendicular al plano *X* (537).

Del mismo modo probaríamos que si se tirára en el plano *X* la linea *BC* perpendicular á *EF*, sería tambien perpendicular al plano *Y*.

540 De esta proposicion se puede inferir, que *si por el punto* B *de la comun seccion de los dos planos* X *é* Y *se tira una linea perpendicular al uno de los planos* X, *habrá de estar en el otro plano* Y.

Porque si no fuera así, dos lineas tiradas desde un mismo punto; es á saber *AB* y la otra linea, serian ambas perpendiculares al plano *X*: y esto es imposible (527).

541 *Las lineas como* AB *y* CD *perpendiculares al plano* X, *son paralelas.* 135.

Tírese la linea recta *BD* en el plano *X* entre las dos per-

Digitized by Google

Fig. perpendiculares, y concíbase un plano *Y*, que pase por *AB* y *BD*; este plano será perpendicular al plano *X*, pues pasa por la perpendicular *AB*, y pasará tambien por *CD*, ó lo que es lo mismo, estará *CD* en el plano *Y* (540): luego las tres lineas *AB*, *CD*, *BD* están en el plano *Y*. Pero las dos lineas *AB*, *CD* son perpendiculares á *BD* (525), que está tambien en el plano *X*: luego *AB* y *CD* son paralelas (338).

542 De donde inferiremos que *se puede concebir que están en un mismo plano* Y *dos lineas perpendiculares á otro plano* X. Es evidente por la prueba de la primera proposicion.

543 *Podemos tambien concebir que están en un mismo plano dos lineas quando son paralelas.*

Supongamos que un plano pase por la una de dichas lineas, y por un punto de la otra: es preciso que esta esté toda en dicho plano; porque si esta segunda paralela no estubiera toda en dicho plano, se apartaria de él, y por consiguiente se apartaria mas y mas de la primera paralela contenida en el plano. De lo que resultaria contra la suposicion, que las dos lineas no serian paralelas.

135. 544 *Si la una* AB *de dos lineas* AB, CD *paralelas, fuese perpendicular al plano* X, *la otra paralela* CD *lo será tambien.*

Concibamos un plano *Y* que pase por las dos paralelas: será *BD* la comun seccion de los dos planos. Pero esta linea *BD* es perpendicular á *AB*, pues *AB* lo es al pla-

plano *X*, y por consiguiente á *BD* (525); del mismo modo Fig.
BD es tambien perpendicular á la otra paralela *CD* (306), y recíprocamente *CD* es perpendicular á *BD*: fuera de esto, el plano *Y* es perpendicular al plano *X* (532), pues pasa por la *AB* perpendicular á dicho plano *X*: luego la linea *CD* que está en el plano *Y*, y es perpendicular á la comun seccion *BD*, lo será tambien al plano *X* (539).

545 *Dos lineas* AB, CD *paralelas á otra linea* GH 135.
son paralelas entre sí, aunque las dos primeras no estén en un mismo plano con la otra.

Porque si imaginamos un plano *X*, al qual *GH* sea perpendicular, las otras dos lineas *AB*, *CD* serán tambien perpendiculares al mismo plano *X* (544): luego estas dos lineas serán paralelas la una á la otra (541).

546 Decimos de dos planos que son *paralelos* quando todos los puntos del uno están á igual distancia del otro, ó lo que viene á ser lo mismo, quando todas las perpendiculares tiradas desde el uno de los planos al otro son iguales.

547 *Si dos planos* X, Y *fuesen paralelos, y los cor-* 136.
tase otro plano Z, *las secciones* AB, CD *de este último plano con los dos primeros serán paralelas.*

Porque 1.° estando estas secciones en dos planos paralelos, no pueden concurrir en un punto. 2.° Tampoco pueden apartarse la una de la otra, encaminándose ácia diferentes lados, porque como pertenecen ambas al plano *Z*, han de seguir la misma direccion ó encaminarse ácia un mismo lado: luego dichas secciones son lineas paralelas.

Si

Digitized by Google

Fig. 137. 548 *Si dos planos* Y, Z, *que se cortan son perpendiculares á otro plano* X, *su comun seccion* AB *será perpendicular á* X.

Imaginemos dos lineas en el plano *X* que pasen ambas por el punto *B*, y una de las quales *JL* sea perpendicular al plano *Y*, y la otra *OP* al plano *Z*. Ya que la linea *JL* es perpendicular al plano *Y*, lo será tambien á la linea *AB* en quanto esta linea está en el plano *Y* (525): luego *AB* es tambien perpendicular á *JL*. Ya que *OP* es perpendicular al plano *Z*, será tambien perpendicular á *AB* en quanto está *AB* en el plano *Z*: luego es tambien *AB* perpendicular á *OP*: luego una vez que *AB* es perpendicular á dos lineas del plano *X*, será tambien perpendicular á dicho plano (537).

549 Quando dos planos son perpendiculares á otro, las intersecciones de dichos dos planos con el tercero forman ángulos que son iguales á los que forman uno con otro dichos dos planos. Y si estos planos están inclinados el uno respecto del otro, los ángulos agudos opuestos al vértice, formados por las intersecciones, ó por mejor decir, el uno de estos ángulos es la medida de la inclinacion de los planos.

Propiedades de las lineas cortadas por planos paralelos.

138. 550 *Dos lineas rectas* AB, CD *que rematan en los dos planos* X, Z *paralelos entre sí, y están cortadas por otro plano* Y *paralelo á los primeros, están cortadas proporcionalmente.*

Con-

Digitized by Google

Concibamos tirada la linea *AD* que encuentre el plano *Y* en *G*; resultarán los triángulos *BAD*, *CDA*, cuyos planos formarán en los tres planos *X*, *Y* y *Z* las secciones *EG*, *BD* y *GF*, *AC*. Pero las dos primeras *EG*, *BD* serán paralelas, porque son las secciones de los planos paralelos *Y* y *Z* con el triángulo *BAD*: y las otras dos *GF*, *AC* son tambien paralelas, pues son las secciones de los dos planos paralelos *Y* y *X* con el triángulo *CDA*: luego por causa de las bases paralelas del triángulo *BAD*, tendrémos *AE* : *EB* :: *AG* : *GD*; y tambien por ser paralelas las bases del triángulo *CDA*, tendrémos *CF* : *FD* :: *AG* : *GD*; luego *AE* : *EB* :: *CF* : *FD*. Fig.

551 *Si desde un punto* J *tomado fuera de un plano* X *se tiran á diferentes puntos* K, L, M *de dicho plano las rectas* JK, JL, JM, *y corta estas rectas un plano* x *paralelo al plano* X, *digo* 1.° *que estas rectas serán cortadas proporcionalmente*: 2.° *que la figura* Klm *será semejante á la figura* KLM. 139.

Supongamos 1.° que no hay mas que tres puntos *K*, *L*, *M*. Ya que las rectas *kl*, *lm*, *mK* son las intersecciones de los planos *JKL*, *JLM*, *JKM* con el plano *x*, son paralelas á las rectas *KL*, *LM*, *MK*, que son las intersecciones de los mismos planos con el plano *X* (547): luego los triángulos *JKL*, *JLM*, *JMK* son semejantes á los triángulos *Jkl*, *Jlm*, *Jmk*, cada uno al suyo: luego *JK* : *Jk* :: *KL* : *kl* :: *JL* : *Jl* :: *LM* : *lm* :: *JM* : *Jm* :: *MK* : *mk*; pero 1.° si de esta série de razones iguales saca-

Fig. camos solo las que se forman con las rectas que salen del
139. punto *J*, tendrémos *JK* : *Jk* : : *JL* : *Jl* : : *JM* : *Jm*; luego las rectas *JK*, *JL*, *JM* están cortadas proporcionalmente.

2.° Si de la primera série de razones iguales sacamos las que se forman con las lineas que están en los dos planos paralelos, saldrá *KL* : *kl* : : *LM* : *lm* : : *KM* : *km*; luego los dos triángulos *KLM*, *klm* son semejantes, pues tienen sus lados proporcionales.

Supongamos ahora el número que quisiéremos de puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *F* &c. demostrarémos cabalmente del mismo modo que las rectas *JA*, *JB*, *JC* &c. están cortadas proporcionalmente; y si imaginamos diagonales *AC*, *AD* &c. *ac*, *ad* &c. tiradas desde los ángulos correspondientes *A* y *a*, demostrarémos tambien del mismo modo que los triángulos *ABC*, *ACD* &c. son semejantes á los triángulos *abc*, *acd* &c. cada uno al suyo: luego los dos polygonos *ABCDF*, *abcdf* constan de un mismo número de triángulos semejantes cada uno al suyo, y puestos de un mismo modo, y son por consiguiente semejantes (484).

552 Ya que las dos figuras *KLM*, *klm* son semejantes, inferamos que el ángulo *KLM* es igual al ángulo *klm*, y por consiguiente *si dos rectas* KL, LM, *que forman un ángulo* KLM, *son paralelas á dos rectas* kl, lm *que forman un ángulo* klm, *el ángulo* KLM *será igual al ángulo* klm, *aun quando estos dos ángulos no estén en un mismo plano.*

553 De ser semejantes las dos figuras *ABCDF* y

a

abcdf, y de serlo tambien las dos *KLM*, *klm*, se infiere que *las superficies de las dos secciones* abcdf, klm *son entre sí como las de las dos figuras* ABCDF, KLM. Fig. 139.

Porque $ABCDF : abcdf :: (AB)^2 : (ab)^2$ (511); pero los triángulos semejantes JAB, Jab dan $AB : ab :: JA : Ja$. Luego (198) $(AB)^2 : (ab)^2 :: (JA)^2 : (Ja)^2$ ó (551) (porque podemos suponer que por el punto J pasa un plano paralelo á los dos planos X y x) :: $(JM)^2 : (Jm)^2$, ó (por ser semejantes los triángulos JML, Jml) :: $(LM)^2 : (lm)^2$; y por consiguiente (511) :: $KLM : klm$; luego $ABCDF : abcdf :: KLM : klm$, ó (186) $ABCDF : KLM :: abcdf : klm$.

554 Síguese de esta demostracion, que *las superficies* ABCDF, abcdf *son entre sí como los quadrados de dos rectas* JA, Ja *tiradas desde el punto* J *á dos puntos correspondientes de las dos figuras, y por consiguiente* (551) *como los quadrados de las alturas ó perpendiculares* JP, Jp *tiradas desde el punto* J *á los planos* X *y* x.

Inferamos, pues, 1.° que si las dos superficies *ABCDF*, *KLM* fuesen iguales, lo serian tambien las dos superficies *abcdf*, *klm*.

2.° Que quanto acabamos de decir seria verdadero, aun quando el punto J en vez de ser comun á las rectas JA, JB, JC &c. y á las rectas JM, JL &c. fuese distinto respecto de cada figura, con tal que estubiese á igual altura respecto del plano x.

De

Fig.

De los Sólidos.

555 Hemos llamado *sólido*, *volumen* ó *cuerpo* (256) todo lo que tiene las tres dimensiones longitud, latitud y profundidad. Nos toca considerar ahora las razones y la medida de los sólidos. Indagarémos quanto abrazan estos dos puntos respecto de los sólidos terminados por superficies planas; y por lo que mira á los que son terminados por superficies curvas, solo tratarémos del *cilindro*, del *cono* y de la *esfera*.

Los sólidos terminados por superficies planas se distinguen en general por el número y la figura de los planos que los terminan.

140. 556 Un sólido cuyas dos caras opuestas son dos
141. planos iguales y paralelos, y las demas caras son parale-
142.
143. logramos, se llama en general un *prisma*.

Se puede, pues, considerar el prisma como engendrado por el movimiento de un plano *BDF*, que se moviese
140. paralelo á sí mismo á lo largo de una linea recta *AB*.

Los dos planos paralelos se llaman las *bases* del prisma, y la perpendicular *LM* tirada desde un punto de la una de las bases á la otra base, se llama la *altura* del prisma.

El modo con que hemos considerado que se engendra el prisma, manifiesta que en qualquiera parte que se corte un prisma por un plano paralelo á la base, la seccion será siempre un plano perfectamente igual á la base; pues

en

Digitized by Google

en qualquiera parte que se corte el prisma, se encontrará Fig.
el plano *BDF* de cuyo movimiento resulta este sólido.

Las líneas como *BA* donde concurren dos paralelogramos consecutivos, se llaman las *aristas* del prisma.

El prisma es *recto* quando las aristas son perpendicu- 141.
lares á la base, en cuyo caso son todas iguales á la altura. El prisma es *obliquo* quando sus aristas están inclinadas 142.
á la base.

Distínguense los prismas por el número de los lados
de su base: si la base es un triángulo, el prisma es un 140.
prisma *triangular*. Si la base es un quadrilátero, se llama 141.
prisma *quadrangular*; y asi de los demas.

Entre los prismas quadrangulares, los principales son el paralelipipedo, y el cubo.

557 El *paralelipipedo* es un prisma quadrangular, 141.
cuyas bases, y por consiguiente todas las caras son paralelogramos; y quando el paralelogramo de la base es un rectángulo, y al mismo tiempo el prisma es recto, se le llama *paralelipipedo rectángulo*.

El paralelipipedo rectángulo se llama *cubo*, quando
la base es un quadrado, y la arista *AB* es igual al lado 143.
de dicho quadrado. Es, pues, el *cubo* un sólido terminado por seis quadrados iguales. Este es el sólido que sirve para medir todos los demás, conforme declararémos muy en breve.

558 Llámase *cilindro* el sólido comprehendido en- 144.
tre dos circunferencias de círculos iguales y paralelos, y 145.

Fig. la superficie que trazaria una linea *AB*, que corriese paralela á sí misma al rededor de dichas dos circunferencias.

144. Llámasele *recto* al cilindro quando la linea *CF*, que junta los centros de las dos bases opuestas, es perpendicular á dichos círculos; esta linea se llama el *exe* del cilindro. Y es
145. *obliquo* el cilindro quando su exe *CF* está inclinado á la base.

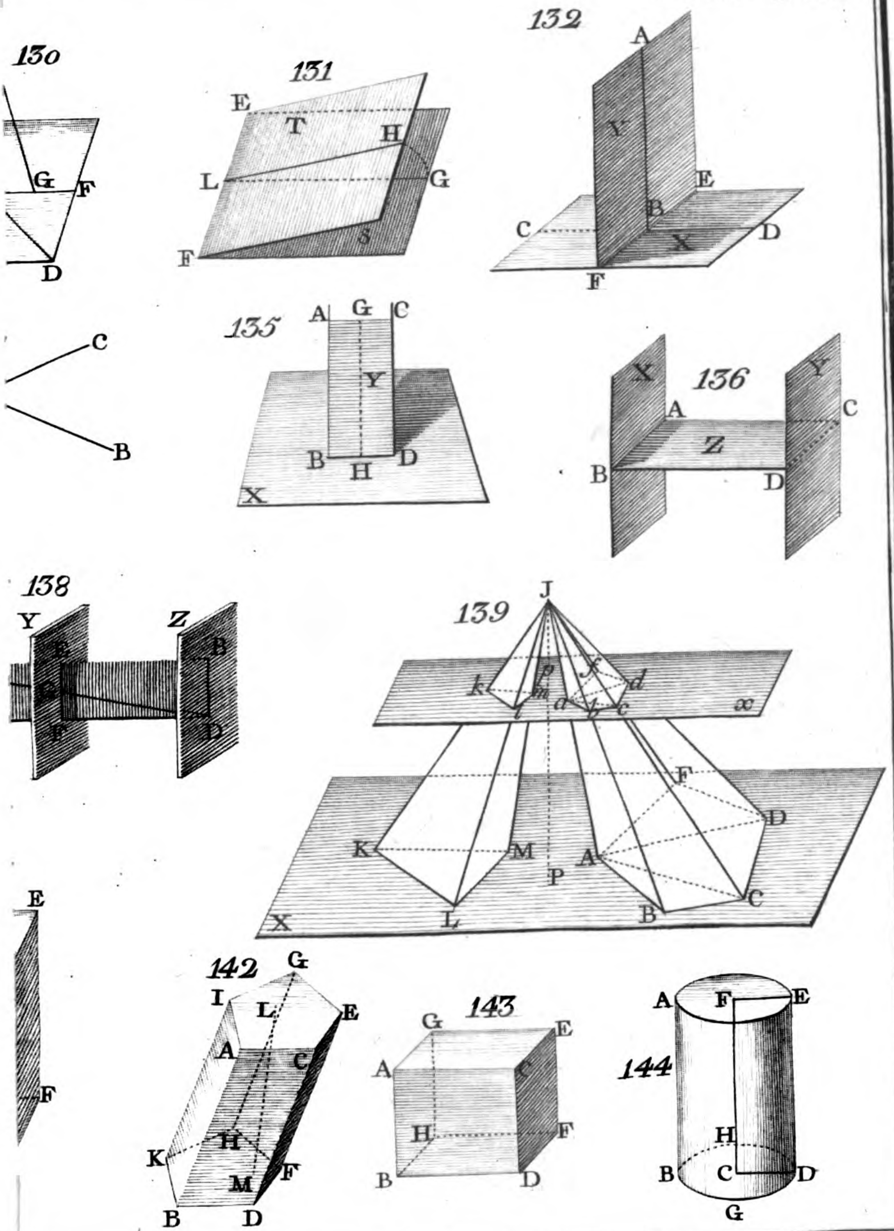
Se puede considerar el cilindro recto como engendrado por el movimiento del paralelogramo rectángulo *FCDE*
144. que dá la vuelta al rededor de un lado *CF*.

559 La *pirámide* es un sólido terminado por muchos planos, el uno de los quales, que se llama la *base*, es un polygono qualquiera, y los otros, que todos son triángulos,
146. tienen por bases los lados de dichos polygonos, y concur-
147. ren todos sus vértices en un mismo punto, que se llama el
148. *vértice* de la pirámide. Véanse las figuras.

La perpendicular *AM* tirada desde el vértice al plano que sirve de base, prolongado si fuese menester, se llama la *altura* de la pirámide.

Distínguense las pirámides por el número de los lados de sus bases: de suerte que aquella cuya base es un triángulo, se llama pirámide *triangular*: aquella cuya base es un quadrilátero, se llama pirámide *quadrangular*; y así prosiguiendo.

Se la llama *regular* á la pirámide quando su base es un polygono regular, y al mismo tiempo la perpendicu-
148. lar *AM* tirada desde el vértice, pasa por el centro de dicho



Digitized by Google

Digitized by Google

cho polygono. La perpendicular *AG* tirada desde el vértice *A* al uno *DE* de los lados de la base, se llama *apotema*. Fig.

Es evidente que todos los triángulos que concurren en el punto *A*, son iguales é isósceles, porque todos tienen sus bases iguales, y las aristas *AB*, *AC*, *AD* &c. son todas iguales, pues son todas obliquas igualmente distantes de la perpendicular *AM*. Tambien es evidente que son iguales todos los apotemas. 148.

560 Llámase *cono* el sólido terminado por el plano circular *BGDH*, que se llama la *base* del cono, y por la 149. superficie que trazaría una linea *AB*, dando vueltas al rededor del punto fijo *A*, y rasando siempre la circunferencia *BGDH*.

El punto *A* se llama el *vértice* del cono.

Llamamos *exe* del cono una linea *AC* tirada desde el vértice *A* al centro *C* de la base. Quando el exe es perpendicular á la base, el cono se llama *recto*, y se llama 149. *cono obliquo* quando el exe está inclinado á la base. 150.

Se puede concebir el cono recto como engendrado por el movimiento del triángulo rectángulo *ACD*, dando la vuelta al rededor del lado *AC*; en cuya generacion salta á la vista, que cada punto del lado *AD* traza un círculo, y que por consiguiente la seccion de un cono por un plano paralelo á su base será un círculo. 149.

561 La *esfera* es un sólido terminado por todas partes por una superficie cuyos puntos están á la misma dis-

 tan-

Fig. tancia de un punto, que se llama el *centro* de la esfera.

Se puede considerar la esfera como engendrada por el
151. movimiento del semicírculo *ADB*, que dá la vuelta al rededor de su diámetro *AB*. El diámetro *AB* al rededor del qual se concibe que el semicírculo dá la vuelta, se llama el *ege*, y sus dos estremos se llaman los *polos* de la esfera.

Es evidente que es uniforme la curvatura de la superficie de una esfera: quiero decir, que dicha curvatura es la misma en todos los puntos de la esfera, del mismo modo que la de la circunferencia de un círculo: de lo que resulta

562 1.° Que *todos los radios de la esfera, y lo propio digo de sus diámetros, son iguales entre sí.*

563 2.° Que *se puede tomar por exe cada uno de los diámetros*, teniendo presente que los estremos del diámetro que se toma por exe, siempre se llaman *polos*.

564 3.° Que *si se corta una esfera con un plano, la seccion, esto es, la nueva superficie que se vé despues de cortada la esfera, es un círculo*; porque si el plano pasa por el centro de la esfera, es patente que la seccion es un círculo cuyo diámetro es igual al de la esfera.

Si el plano que corta la esfera no pasa por el cen-
152. tro, considérese una linea *CF* tirada desde el centro de la esfera perpendicularmente á la seccion, y muchas obliquas *Ce*, *Cd* &c. tiradas desde el mismo centro á todos los puntos estremos de dicha seccion. Como todos estos puntos están en la superficie de la esfera, las lineas obli-

quas

Digitized by Google

quas son radios, y son por lo mismo iguales entre sí: luego las obliquas están á igual distancia de la perpendicular (316); están, pues, en la circunferencia de un círculo en cuyo centro remata la perpendicular: luego la seccion de una esfera cortada con un plano es un círculo, pase ó no pase el plano por el centro de la esfera. Fig.

565 Los círculos cuyos planos pasan por el centro de la esfera se llaman *círculos máximos*, y llamamos *círculos menores* aquellos cuyos planos no pasan por el centro de la esfera. Quando se habla de círculos de la esfera, se entienden aquellos cuya circunferencia está en la superficie de la esfera.

566 Llámase *sector esférico* el sólido que engendra el sector circular *BCA* dando la vuelta al rededor del radio *AC*. La superficie que describirá en virtud de este movimiento el arco *AB*, se llama *casquete esférico*. 153.

567 El *segmento esférico* es el sólido que engendraría el semisegmento circular *AFB* dando la vuelta al rededor de la parte *AF* del radio.

De la Medida de las Superficies de los Sólidos.

568 Una vez que las superficies de los prismas, y de las pirámides se componen de paralelogramos, de triángulos, y de polygonos rectilineos, podriamos escusar declarar aqui lo que se debe practicar para medirlas, pues hemos enseñado (495, 497 y 501) los medios para conseguirlo. Pero de lo que hemos dicho en orden á esto se pueden sacar al-

Fig. gunas consecuencias, que no solo contribuirán para simplificar las operaciones en que estas medidas empeñan, sino que tambien servirán para valuar las superficies de los cilindros, de los conos, y aun de la esfera.

569 *La superficie de un prisma qualquiera, no entrando las dos bases, es igual al producto de una de las*
154. *aristas por el perímetro de una seccion* bdfh *hecha con un plano al qual dicha arista sea perpendicular.*

Porque ya que la arista *AB* es perpendicular, por la suposicion, al plano *bdfh*, las demas aristas que son todas paralelas á esta, serán tambien perpendiculares al plano *bdfh*: luego recíprocamente las rectas *bd*, *df*, *fb* &c. serán perpendiculares cada una á la arista que corta. Considerando, pues, las aristas como las bases de los paralelogramos que rodean el prisma, las lineas *bd*, *df*, *fb* &c. serán sus alturas: luego para sacar la superficie del prisma, será preciso multiplicar la arista *AB* por la perpendicular *bd*, la arista *CD* por la perpendicular *df*, y así prosiguiendo, y sumar todos estos productos; pero como son iguales todas las aristas, lo mismo se sacará multiplicando sola una *AB* por la suma de todas las alturas, esto es, por todo el perímetro *bdfh*.

570 Quando el prisma es recto, la seccion *bdfh* es lo mismo que la base *BDFH*, y la altura *AB* es lo mismo que la altura del prisma: luego *la superficie de un prisma recto* (no contando las dos bases) *es igual al producto del perímetro de la base multiplicado por la altura.*

He-

Digitized by Google

571 Hemos visto antes (444) que se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados: luego podemos considerar el cilindro como un prisma cuya superficie constase de un número infinito de paralelogramos: luego Fig.

La superficie de un cilindro recto, no contando las bases, es igual al producto de la altura de dicho cilindro, por la circunferencia de su base.

Ya declaramos antes (504) cómo se halla esta circunferencia.

572 Por lo que mira al cilindro obliquo se ha de multiplicar su altura *AB* por la circunferencia de la seccion *bgdb*, haciendo esta seccion conforme enseñamos (569). 155.
El método para determinar la longitud de esta seccion se funda en principios muy diversos de los que hasta ahora hemos sentado. En la práctica es preciso contentarse con medirla mecánicamente, envolviendo el cilindro con un hilo ú otra cosa equivalente, que será menester sujetar en un plano, al qual la longitud *AB* del cilindro sea perpendicular.

573 Por lo que mira á la pirámide, si no fuere regular, *se deberá buscar separadamente la superficie de cada uno de los triángulos que la componen, y sumarlas todas.*

Pero *si fuese regular, se puede sacar por un método mas breve su superficie, multiplicando el perímetro de su base por la mitad del apotema* AG; porque siendo una misma la 148.
altura de todos los triángulos, basta multiplicar la mitad de la altura comun por la suma de todas las bases.

Digitized by Google

Fig. 574 Considerando la circunferencia de un círculo como un polygono regular de una infinidad de lados, se echa de ver que el cono no es mas que una pirámide regular, cuya superficie, no contando la de la base, se compone de una infinidad de triángulos, y que por consiguiente *la su-*
149. *perficie convexa de un cono recto es igual al producto de la circunferencia de su base por la mitad del lado* AB *del mismo cono.*

575 Por lo que toca á la superficie del cono oblíquo, pende de otros principios su investigacion, por lo que omitirémos declarar aqui método alguno para hallarla. Pero por lo que pueda ocurrir, dirémos que el modo con que hemos considerado el cono, subministra un medio para hallar el valor de su superficie, con poca diferencia, quando es obliquo. Se ha de partir la circunferencia de la base en un número suficiente de arcos, para que se pueda considerar cada uno, sin error substancial, como una linea recta. Hecho esto se calculará la superficie como la de una pirámide que constase de tantos triángulos quantos arcos hubiese.

576 Para *hallar la superficie de un trozo de cono recto, cuyas bases opuestas* BGDH, bgdh *son paralelas, se*
156. *ha de multiplicar el lado* Bb *del trozo por la mitad de la suma de las circunferencias de las dos bases opuestas.*

Con efecto, se puede considerar dicha superficie como el conjunto de una infinidad de trapecios como *EFfe*, cuyos lados *Ee*, *Ff* ván á rematar en el vértice *A*; pero la superficie de cada uno de estos trapecios es igual á la mi-

mitad de la suma de las dos bases opuestas *EF*, *ef*, multiplicada por la distancia que hay entre ellas (500), cuya distancia no se distingue de cada uno de los lados *Ee*, *Ff* ó *Bb*: luego para sacar la suma de todos estos trapecios, se ha de multiplicar la mitad de la suma de todas las bases opuestas, como *EF*, *ef*, èsto es, la mitad de la suma de las dos circunferencias por la linea *Bb*, altura comun de todos estos trapecios. Fig.

577 Si por el medio *M* del lado *Bb* se pasa un plano paralelo á la base, la seccion será (551) un 156. círculo cuya circunferencia será la mitad de la suma de las circunferencias de las dos bases opuestas, porque su diámetro *MN* (500) es la mitad de la suma de los diámetros de las bases, y porque (487) las circunferencias son entre sí como sus diámetros. Luego *la superficie de un cono recto truncado, de bases paralelas, es igual al producto del lado del tronco, por la circunferencia de la seccion hecha á iguales distancias de las dos bases opuestas.* Nos servirá esta proposicion para probar la que se sigue.

578 *La superficie de una esfera es igual al producto de la circunferencia de uno de sus círculos máximos multiplicada por el diámetro.*

Concíbase la semicircunferencia *AKD* dividida en una 157. infinidad de arcos, como *KL*; siendo este arco infinitamente pequeño, se confundirá con su cuerda.

Tírense por los estremos de *KL* las perpendiculares *KE*, *LF* al diámetro *AD*, y por el medio *J* de *KL*, ó de

Fig. de su cuerda, tírese JH paralela á KE, y el radio JC; este radio será perpendicular á KL (350). Si se concibe que la semicircunferencia AKD dá la vuelta al rededor de AD, engendrará la superficie de la esfera, y cada uno de sus arcos KL engendrará la superficie de un cono truncado, que será un elemento de la superficie de la esfera. Repre-
158. senta $KLFL'K'EK$ el cono truncado que engendra el arco KL, y cuyo vértice, si fuese entero, estaria en el punto A. Vamos á probar que la superficie de éste cono trun-
157. cado es igual al producto de KM ó EF multiplicada por la circunferencia cuyo radio es JC ó AC. El triángulo KML es semejante al triángulo JHC, pues los lados del uno son perpendiculares á los lados del otro, segun hemos dicho que se habian de tirar. Estos triángulos semejantes darán (463) esta proporcion $KL : KM :: JC : JH$; ó (ya que (487) las circunferencias son entre sí como sus radios) $KL : KM ::$ cir. JC : cir. JH; luego (182) $KL \times$ cir. JH es igual á $KM \times$ cir. JC, ó (lo que viene á ser lo mismo) es igual á $EF \times$ cir. AC. Pero (557) el primero de estos productos expresa la superficie del cono truncado engendrado por KL: luego este cono truncado es igual á $EF \times$ cir. AC; esto es, al producto de su altura EF por la circunferencia de un círculo máximo de la esfera. Y como se demostraria lo mismo y del mismo modo respecto de otro arco distinto de KL, hemos de inferir que la suma de los pequeños conos truncados, que componen la superficie de la esfera, es igual á la circun-

fe-

Digitized by Google

ferencia de uno de sus círculos máximos, multiplicada por la suma de las alturas de dichos conos truncados, cuya suma forma evidentemente el diámetro: luego la superficie de la esfera es igual á la circunferencia de uno de sus círculos máximos multiplicada por el diámetro. Fig.

579 Si imaginamos un cilindro, que ciña la esfera tocandola, y cuya altura sea igual al diámetro de dicha esfera; quiero decir, que si se concibe un *cilindro circunscripto á la esfera*, se podrá inferir *que la superficie de la esfera es igual á la superficie convexa del cilindro circunscripto*; porque (571) la superficie de dicho cilindro es igual al producto de la circunferencia de la base, multiplicada por la altura; pero la circunferencia de la base es la de un círculo máximo de la esfera, y la altura es igual al diámetro: luego &c. 159.

580 Ya que para sacar la superficie de un círculo se ha de multiplicar (503) la circunferencia por la mitad del radio ó la quarta parte del diámetro, y para sacar la de la esfera se ha de multiplicar la circunferencia por el diámetro entero, se ha de inferir que la *superficie de la esfera es quádrupla de la superficie de uno de sus círculos máximos.*

581 La demostracion que hemos dado del método para medir la superficie de la esfera, prueba tambien que para *sacar la superficie convexa del segmento esférico, que engendraría el arco* AL *dando la vuelta al rededor del diámetro* AD, *se ha de multiplicar la circunferencia de un círcu-* 160.

lo

Fig. *lo máximo de la esfera por la altura* AJ *de dicho segmento*; y que para *sacar la superficie de una porcion de esfera comprehendida entre dos planos paralelos*, *como* LKM, NRP, *se ha de multiplicar igualmente la circunferencia de un círculo máximo de la esfera por la altura* JO *de la misma porcion de esfera.*

Porque podemos considerar estas superficies conforme lo hemos practicado respecto de toda la esfera, como compuestas de una infinidad de conos truncados, cada uno de los quales es igual al producto de su altura por la circunferencia de un círculo máximo de la esfera.

582 Luego *si se cortan el cilindro y la esfera que le está inscripta con dos planos* KH, ST *perpendiculares al exe*
161. EF *del cilindro*; *las superficies convexas del trozo esférico y del trozo cilíndrico, comprehendidas entre dichos dos planos paralelos, serán iguales.*

Porque el trozo cilíndrico *HKST* se puede considerar como un cilindro cuya superficie convexa será igual (571) al producto de la circunferencia de su base por su altura, esto es al producto de un círculo máximo de la esfera inscripta por la altura *JV* de dicho cilindro; pero la superficie convexa del trozo esférico comprehendido entre los dos planos paralelos es tambien igual (577) al producto de la circunferencia de un círculo máximo de la esfera por su altura ó la distancia *JV*: luego &c.

583 Del mismo modo probaríamos que la superficie convexa del casquete esférico *EMVGE* es igual á la

su-

superficie convexa del cilindro BH, que tiene el mismo Fig.
diámetro que la esfera, y la misma altura que el casquete.
Y como la superficie convexa del cilindro BH es igual
(571) á cir. $KV \times BK$ ó á cir. $EC \times EV$, será tambien
igual la superficie convexa del casquete al producto circ.
$EC \times EV$.

584 Pero si se tiran las cuerdas ME, MF, los triángulos EVM, EMF, siendo rectángulos el uno en V, el otro en M (376), y teniendo comun el ángulo E, serán semejantes (460), y darán $EV : EM :: EM : EF$. Dividiendo por 2 los consecuentes de esta proporcion, saldrá $EV : \frac{EM}{2} :: EM : \frac{EF}{2} = EC$. Pero (487) $EM : EC ::$ cir. EM : cir. EC; luego $EV : \frac{EM}{2} ::$ cir. EM : cir. EC; y por lo mismo cir. $EC \times EV$ es igual á cir. $EM \times \frac{EM}{2}$. Pero (583) el producto de cir. EC por EV es la superficie convexa del casquete $EMVGE$, y cir. EM multiplicado por $\frac{EM}{2}$ es la superficie de un círculo cuyo radio es EM: luego *la superficie convexa de un casquete* EMVGE *es igual á la superficie de un círculo cuyo radio es la cuerda* EM *tirada desde el vértice del casquete al borde de su base.* 162.

585 Por ser rectángulo en V el triángulo MVE, la superficie del círculo cuyo radio es EM, es igual á la suma de las superficies de los dos círculos que tienen por radios los lados MV, EV del ángulo recto. Luego *la superficie convexa del casquete* EMVGE *vale la superficie del círculo cuyo radio es* MV, *y que sirve de base al casquete,*

aña-

Digitized by Google

Fig. *añadida á la superficie del círculo cuyo radio es la altura* EV *del casquete.*

De la razon de las Superficies de los Sólidos.

586 Quando dos sólidos cuyas superficies queremos comparar una con otra estan terminados por planos desemejantes é irregulares, el único medio para averiguar la razon que hay entre sus superficies, consiste en calcular separadamente la superficie de cada uno en medidas de la misma especie, y comparar el número de medidas que cabe en la una con el número de medidas que cabe en la otra, esto es, por egemplo, el número de los pies quadrados de la una con los pies quadrados de la otra.

587 *Las superficies de los prismas (no contando las de las bases opuestas) son entre sí como los productos de la longitud de dichos prismas por el contorno de la seccion hecha perpendicularmente á dicha longitud.*

Porque dichas superficies son iguales á dichos productos (569).

588 Luego *si fueren iguales las longitudes, las superficies de los prismas serán entre sí como el contorno ó perímetro de la seccion hecha perpendicularmente á la longitud de cada uno.*

Porque la razon de los productos de la longitud por el perímetro de dicha seccion, no mudará aunque se omita en cada uno de dichos productos la longitud que fuere factor comun.

589 Luego *las superficies de los prismas rectos ó de los*

los cilindros rectos de igual altura, son entre sí como los contornos de las bases, sea la que fuere la figura de dichas bases. Fig.

Y si al contrario fuesen los mismos los perímetros de las bases, y distintas las alturas, dichas superficies serán como las alturas.

590 *Las superficies de los conos rectos son entre sí como los productos de los lados de dichos conos por las circunferencias de las bases, ó por los radios ó por los diámetros de dichas bases.*

Porque ya que cada una de dichas superficies es igual al producto de la circunferencia de la base por la mitad del lado del cono (574), han de ser entre sí como dichos productos, y por consiguiente como el duplo de dichos productos. Fuera de esto, como tienen las circunferencias la misma razon entre sí que sus radios ó diámetros, se puede substituir (487) en dichos productos la razon de los radios ó de los diámetros en lugar de la de las circunferencias.

591 Llamamos *sólidos semejantes* aquellos que están terminados por un mismo número de superficies semejantes, y cuyos ángulos sólidos * son iguales entre sí, cada uno al suyo; esto es, quando los ángulos planos, que forman cada ángulo sólido del primero, son iguales en número y cantidad á los que forman el ángulo sólido correspondiente del segundo. Y asi para que dos cuerpos sean semejan-

* *Muy en breve dirémos qué ángulo es el que llamamos ángulo sólido.*

Digitized by Google

Fig. jantes, no basta que sean las caras del uno semejantes á las del otro; sino que se necesita á mas de esto que haya tantas caras en el uno de los cuerpos como en el otro, y que los ángulos sólidos del uno sean iguales á los ángulos sólidos del otro, conforme acabamos de decir.

592 Síguese de esto, que *no pueden ser semejantes dos cuerpos, á menos que no sean de la misma especie*; y asi un prisma y una pirámide, por egemplo, no pueden ser semejantes: tampoco lo pueden ser un prisma recto y un prisma oblíquo, ni un prisma oblíquo y otro prisma oblíquo mas ó menos inclinado, ni un prisma triángular y otro pentagonal &c. En una palabra, no pueden ser semejantes dos cuerpos á menos que no tengan la misma figura; y solo se han de diferenciar en que el uno sea mas grueso que el otro.

593 *Quando dos cuerpos son semejantes, las lineas tiradas en el uno de dichos cuerpos son proporcionales á las lineas correspondientes ó tiradas del mismo modo en el otro*: de suerte que si en el primer cuerpo una de dichas lineas es dupla ó tripla de la que le corresponde en el segundo, las demás lineas del primero serán tambien duplas ó triplas de sus correspondientes en el segundo. Por egemplo, si son semejantes dos cilindros, las alturas son proporcionales á las circunferencias de las bases ó á sus radios. Lo mismo se verifica en dos conos. Sentado esto

594 *Las superficies de los sólidos semejantes son entre sí como los quadrados de sus lineas homólogas.*

Por-

Digitized by Google

Porque se componen de planos semejantes, cuyas superficies son entre sí como los quadrados de sus lados ó lineas homólogas, cuyas lineas son lineas homólogas de los sólidos, y proporcionales á todas las demás lineas homólogas. Fig.

595 *Las superficies de dos esferas son entre sí como los quadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Porque ya que es la superficie de una esfera quádrupla de la de su círculo máximo (580), las superficies de dos esferas han de ser entre sí como el quádruplo de sus círculos máximos, ó simplemente como sus círculos máximos; esto es (487), como los quadrados de los radios ó de los diámetros.

De la solidez de los Prismas.

596 Para formar concepto cabal de lo que llamamos *solidez* de un cuerpo, conviene figurarse una porcion de estension de la forma que se quisiere, de la forma de un cubo, por egemplo, pero que tenga infinitamente poca longitud, latitud y profundidad, y concebir que la capacidad de un cuerpo está enteramente llena de cubos como el espresado, á los quales llamarémos *puntos sólidos. El total de estos puntos constituye lo que llamamos solidez de un cuerpo.*

597 *Dos prismas ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro de la misma base y altura, ó de bases y alturas iguales, son iguales en solidez, aunque sean diferentes las figuras de las bases.*

Porque si imaginamos estos cuerpos cortados con pla-

Digitized by Google

Fig. nos paralelos á sus bases, en porciones infinitamente delgadas, y de un grueso igual al de los puntos sólidos de que se puede concebir que dichos cuerpos estan compuestos; es evidente que en cada uno, siendo cada seccion igual á la base (556), el número de puntos sólidos de que se compondrá cada base, será en todas partes el mismo é igual al número de los puntos superficiales de la base; y como suponemos igual altura en ambos sólidos, tendrá cada uno el mismo número de rebanadas: contendrán, pues, en todo el mismo número de puntos sólidos: luego serán iguales en solidez.

De la medida de la solidez de los Prismas y Cilindros.

598 La consideracion de los puntos sólidos de que hablamos poco há es muy util, particularmente quando para demostrar la igualdad de dos sólidos, es preciso considerarlos en sus mismos elementos, deshaciéndolos, digámoslo asi, en rebanadas sumamente delgadas. Pero quando se quieren medir las solideces ó capacidades de dos sólidos para los usos ordinarios, no se consigue este fin intentando valuar el número de sus puntos sólidos; porque se echa de ver que en qualquiera cuerpo hay una infinidad de estos puntos.

Por este motivo, quando se mide la solidez de los cuerpos, el fin es determinar quantas veces el cuerpo de que se trata contiene otro cuerpo conocido. Por egemplo, quando
163. se quiere medir el paralelipipedo rectángulo *ABCDEFGH*,
el

Digitized by Google

el objeto es conocer quantos cubos contiene dicho paraleli- Fig.
pipedo iguales al cubo conocido *x*. Por lo comun se valua en medidas cúbicas la solidez de los cuerpos.

Para hallar la solidez del paralelipipedo rectángulo 163.
ABCDEFGH, *se ha de buscar quantas partes quadradas como* efgh *caben en la base* EFGH, *buscar quantas veces la altura* ah *cabe en la altura* AH, *y multiplicar el número de las partes quadradas de* EFGH *por el número de las partes de* AH: *el producto espresará quantos cubos como* x *caben en el paralelipipedo propuesto*: *quiero decir, quantos pies cúbicos ó pulgadas cúbicas contiene, segun sea de un pie ó de una pulgada el lado* ah *del cubo* x.

Con efecto, es evidente que se pueden colocar en la superficie *EFGH* tantos cubos como *x*, quantos quadrados como *efgh* hay en la base *EFGH*. Todos estos cubos juntos formarán un paralelipipedo, cuya altura *HL* será igual á *ah*; pero es evidente que se podrán colocar en el sólido *ABCDEFGH* tantos paralelipipedos como aquel, quantas veces la altura *HL* cupiese en *AH*: luego se ha de repetir dicho paralelipipedo, ó el número de los cubos que se pueden colocar en *EFGH* tantas veces quantas partes hay en *AH*; ó como el número de dichos cubos es el mismo que el número de los quadrados contenidos en la base, se ha de multiplicar el número de los quadrados contenidos en la base por el número de las partes de la altura, y el producto espresará el número de cubos contenidos en el paralelipipedo propuesto.

Digitized by Google

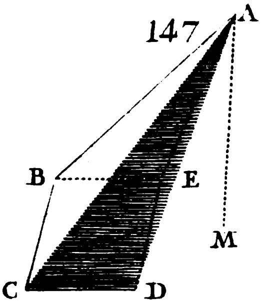
Fig. 599 Como hemos demostrado (597) que los prismas de bases y alturas iguales son iguales en solidez, se sigue de esta proposicion y de lo que acabamos de decir, que para sacar el número de medidas cúbicas que caben
154. en un paralelipipedo qualquiera *ACEGHBDF* se ha de valuar su base *BDFH* en medidas quadradas, y su altura *LM* en partes iguales al lado del cubo que sirve de medida, y multiplicar el número de medidas que se hubiesen hallado en la base por el número de las medidas lineares de la altura: esto suele espresarse comunmente diciendo: *La solidez de un prisma qualquiera es igual al producto de la superficie de la base por la altura de dicho prisma.*

Pero aqui es preciso prevenir lo mismo que prevenimos (495) respecto de las superficies. Asi como no se puede decir hablando con propiedad, que se multiplica una linea por una linea, tampoco se puede decir que se multiplica una superficie por una linea. Esto es lo mismo, conforme lo acabamos de ver, que tomar un sólido (que consta de tantos cubos quantos quadrados hay en su base) tantas veces quantas su altura cabe en la del sólido total: quiero decir, tantas veces quantas cabe en el sólido que se quiere medir.

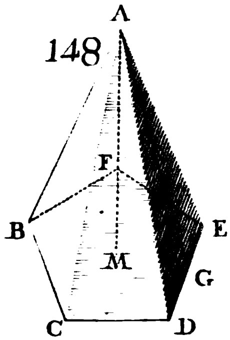
600 Inferamos, pues, de lo que precede, que para *sacar la solidez de un cilindro recto ú obliquo, se ha de multiplicar igualmente la superficie de su base por la altura de dicho cilindro*, pues un cilindro es igual á un prisma de igual base y altura que él (597).

Digitized by Google

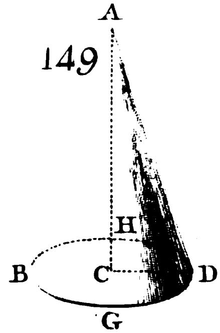
147



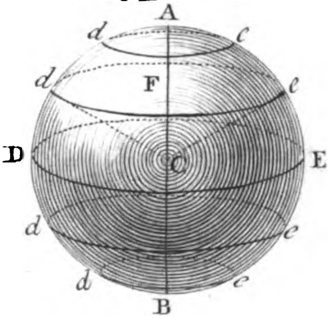
148



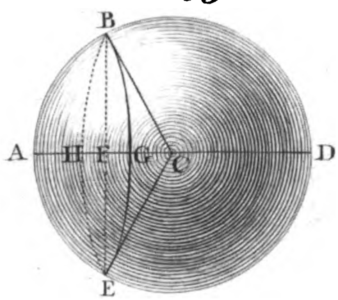
149



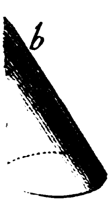
152



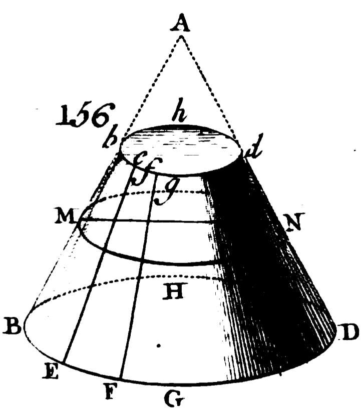
153



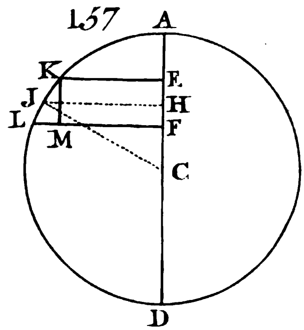
55



156



157



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig.

De la solidez de las Pirámides.

601 El que tuviere presente lo que digímos (553), y lo aplicáre á las pirámides, podrá inferir que si se cortan dos pirámides *JABCDF*, *JKLM* de igual altura con 164.
un mismo plano *ge* paralelo al plano de su base, las secciones *abcdf*, *klm* serán entre sí en la razon de las bases *ABCDF*, *KLM*, y serán por consiguiente iguales entre sí, si estas bases fuesen iguales. Si concebimos á mas de esto estas pirámides cortadas con un plano paralelo al plano *ge*, é infinitamente inmediato á este, se vé que las dos rebanadas sólidas comprehendidas entre estos dos planos infinitamente inmediatos, han de tener tambien entre sí la razon de las bases, pues el número de puntos sólidos necesarios para llenar estas dos rebanadas de igual grueso, solo puede pender de la magnitud de las secciones correspondientes. Sentado esto, como las dos pirámides son de igual altura, no se pueden concebir mas rebanadas en la una que en la otra; y asi, como todas las rebanadas correspondientes guardan la razon de las bases, el total de dichas rebanadas, y por consiguiente las solideces de las pirámides, serán entre sí como las bases. Luego *las solideces de dos pirámides de igual altura, son entre sí como las bases de dichas pirámides, y por consiguiente las pirámides de bases iguales y de alturas iguales, son iguales en solidez, aunque sean diferentes las figuras de las bases.*

Digitized by Google

Fig.

Medida de la solidez de las Pirámides.

602 Ya que medir un cuerpo no es mas que buscar quantas veces contiene otro cuerpo conocido, ó en general buscar qué razon tiene con otro cuerpo conocido; para medir las pirámides bastará buscar qué razon tienen con los prismas, conforme lo declararémos en la proposicion siguiente.

603 *Una pirámide qualquiera es el tercio de un prisma de la misma base y altura que ella.*

Redúcese la demostracion de esta proposicion á probar que una pirámide triangular es el tercio de un prisma triangular de la misma base y altura que ella; porque podemos siempre concebir un prisma como compuesto de otros tantos prismas triangulares, y una pirámide como el conjunto de otras tantas pirámides triangulares quantos triángulos se pueden concebir en el polygono que sirve de base al uno y al otro.

Pero la verdad de esta proposicion en orden á la pirámide triangular se puede manifestar del modo siguiente.
165. Sea *ABCDEF* un prisma triangular: imaginemos que en las caras *AE*, *CE* de dicho prisma se hayan tirado las dos diagonales *BD*, *BF*, y que por estas diagonales pase un plano *BDF*: este plano separará del prisma una pirámide de la misma base y altura que el prisma, pues tiene su vértice en el punto *B* de la base superior, y tiene por base la misma
166. base inferior *DEF* del prisma. *BDEF* representa esta pirámi-

mide separada, y *BACFD* representa lo que queda del prisma. Fig. 167.

Podemos concebir esta resta como trastornada, y puesta sobre la cara *ADFC*; y entonces se vé que es una pirámide quadrangular, que tiene por base el paralelogramo *ADFC*, y por vértice el punto *B*: luego si imaginamos que en la base *ADFC* se haya tirado la diagonal *CD*, podrémos imaginar que la pirámide total *ADFCB* se compone de dos pirámides triangulares *ADCB*, *CFDB*, que tendrán por bases los dos triangulares iguales *ACD*, *CDF*, y por vértice comun el punto *B*, y que por consiguiente serán iguales (601). Pero de estas dos pirámides la una, es á saber, la pirámide *ADCB* se puede concebir como que tiene por base el triángulo *ABC*, esto es, la base superior del prisma, y por vértice el punto *D*, que ha sido de la base inferior. Es, pues, igual esta pirámide á la pirámide *DEFB*, pues tiene una misma base y altura que 166.
ella: luego las tres pirámides *DEFB*, *ADCB*, *CFDB* 167.
son iguales entre sí; y yá que juntas componen el prisma, hemos de inferir que cada una es el tercio del prisma *ABCDEF* de igual base y altura que él. 165.

604 Como un cono puede ser considerado como una pirámide cuya base tuviese una infinidad de lados, y el cilindro como un prisma cuya base tuviese tambien una infinidad de lados, hemos de inferir que *un cono recto ú obliquo es el tercio de un cilindro de igual base é igual altura que él.*

 Lue-

Fig. 605 Luego *para sacar la solidez de una pirámide ó de un cono qualquiera, se ha de multiplicar la superficie de la base por el tercio de la altura.*

606 Si se corta la pirámide recta quadrangular
168. *AEDBC* con un plano que pase por el ege, y sea paralelo al uno de los lados de la base, representará la seccion un triángulo isósceles *FCG*, cuyos elementos, ó las lineas que le forman, componen todos una progresion arisméticas (449). Pero como estos elementos son otras tantas lineas iguales á los lados de los quadrados que componen la pirámide, se deduce que se compone la pirámide de un número infinito de quadrados, cuyos lados están en progresion arismética. Pero ya que para hallar la suma de todos estos quadrados, esto es, la solidez de la pirámide, se ha de multiplicar el quadrado *AD* por el tercio de la perpendicular *CH*, se podrá inferir de aqui que *si ocurriese una progresion arismética infinita formada por lineas de las quales la menor es cero, se sacará la suma de los quadrados de todas estas lineas con multiplicar el quadrado de la linea mayor por el tercio de la cantidad que expresa el número de las lineas ó de los quadrados.*

607 Por lo que mira al *trozo de pirámide ó de cono,* quando son paralelas las dos bases opuestas, lo que hay que hacer *para sacar su solidez, consiste en hallar la altura de la pirámide quitada, y entonces es facil calcular la solidez de la pirámide entera y de la pirámide quitada, y por consiguiente la del trozo.*

Por,

Por egemplo, si quiero sacar la solidez del trozo Fig.
KLMklm, veo que se ha de multiplicar (605) la superficie *KLM* por el tercio de la altura *JP*: multiplicar 164.
igualmente la superficie *klm* por el tercio de la altura *Jp*, y restar este último producto del primero; pero como no conocemos, ni la altura de la pirámide total, ni la de la pirámide quitada, se determinará la una y la otra del modo siguiente. Hemos visto antes (551) que las líneas *JL*, *JM*, *JP* &c. están cortadas proporcionalmente por el plano *ge*, y que son respecto de sus partes *Jl*, *Jm*, *Jp*, lo que *LM* á *Lm*: luego tendrémos

$$LM : lm :: JP : Jp;$$

Luego (188) $LM - lm : LM :: JP - Jp : JP$; esto es, $LM - lm : LM :: Pp : JP$.

Pero quando es conocido el trozo, es facil medir los lados *LM*, *lm*, y la altura *Pp*: se podrá, pues, por esta proporcion calcular el quarto término *JP*, ó la altura de la pirámide total, y restando la del trozo, se hallará la altura de la pirámide quitada.

De la solidez de la Esfera, de sus Sectores y de sus Segmentos.

608 *Para sacar la solidez de una esfera se ha de multiplicar su superficie por el tercio del radio.*

Porque podemos considerar la superficie de la esfera como el conjunto de una infinidad de planos infinitamente pequeños, cada uno de los quales sirve de base á una pequeña pirámide cuyo vértice está en el centro de la esfera, Fig. ra, y cuya altura es por consiguiente el radío. Una vez que cada una de estas pequeñas pirámides es igual (605) al producto de su base por el tercio de su altura, esto es por el tercio del radio, serán todas juntas iguales al producto de la suma de todas sus bases por el tercio del radio; esto es, iguales al producto de la superficie de la esfera por el tercio del radio.

609 Ya que la superficie de la esfera es quádrupla (580) de la superficie de uno de sus círculos máximos, *se puede*, pues, *para sacar la solidez de una esfera, multiplicar el tercio del radio por quatro veces la superficie de un círculo máximo, ó quatro veces el tercio del radio por la superficie de uno de los círculos máximos, ó finalmente los $\frac{2}{3}$ del diámetro por la superficie de un círculo máximo.*

610 Hemos visto que para sacar la solidez de un cilindro, se habia de multiplicar la superficie de la base por la altura. Si se trata, pues, del cilindro circunscripto á la esfera, se puede decir que *su solidez es igual al pro-*
159. *ducto de la superficie de uno de los círculos máximos de la esfera por el diámetro*; pero la de la esfera (609) es igual al producto de un círculo máximo por los $\frac{2}{3}$ del diámetro: luego la solidez de la esfera no es sino los $\frac{2}{3}$ de la del cilindro circunscripto.

611 Asi como la semicircunferencia *ADFCA*, dando la vuelta al rededor del diámetro *AF*, engendraria la
169. esfera entera, y el rectángulo *ABDEFCA*, dando la vuelta

ta al rededor del mismo diámetro *AF*, engendraria el cilindro entero (558); el quadrante de círculo *ADCA* dando la vuelta al rededor del radio *CA*, engendraria una media esfera, y el rectángulo *ABDCA*, dando la vuelta al rededor del mismo radio *AC*, engendraria un semicilindro. Como las mitades tienen entre sí la misma razon que sus todos, seria tambien la semiesfera engendrada del quadrante *ACDA*, los $\frac{2}{3}$ del semicilindro engendrado por el quadrado *AD*; y como el cono engendrado por el triángulo *BAC* seria $\frac{1}{3}$ del mismo cilindro (604), hemos de inferir que la *semiesfera es dupla del cono cuya base tiene un mismo diámetro que la esfera, y cuya altura es igual al radio de la misma esfera.* Luego *la esfera entera es quádrupla de un cono que tiene por base un círculo del mismo radio que el de la esfera, y por altura el radio de la misma esfera.* Fig.

612 Luego *es igual la esfera á un cono cuya base es quádrupla de un círculo máximo de la esfera, y cuya altura es igual al radio de la misma esfera.*

Porque este cono vale por quatro que tuviesen por radio de sus bases el radio de la misma esfera, siendo su altura tambien igual al mismo radio. Y como un círculo cuyo radio es igual al diámetro de la esfera, es quadruplo de un círculo máximo de la esfera que tiene el mismo radio que ella, por ser estos círculos (512) como los quadrados de los números 2 y 1, que espresan sus radios en virtud del supuesto que hacemos, cuyos quadrados se han como 4 : 1; es evidente que

Fig. que toda la esfera es igual á un cono cuya base tiene por radio el diámetro de dicha esfera, y la altura es igual al radio de la misma esfera.

613 De lo que digimos antes para sacar la solidez de una esfera, podemos inferir que *un cono esférico ó sec-*
170. *tor* CABD *de esfera es igual á un cono, ó á una pirámide, cuya altura fuese igual al radio de la esfera, y la base fuese igual á la superficie esférica del casquete* BAD.

Porque se compone este sector de una infinidad de pequeñas pirámides que tienen todas su vértice en el centro de la esfera, y cuyas bases componen la superficie esférica del casquete.

614 Como la superficie esférica del casquete *BAD* (584) es igual á la area del círculo cuyo radio es la recta *BA* tirada desde el vértice del casquete á la orilla
170. de su base; el *sector esférico* CABD *es igual á un cono cuya altura fuese el radio de la esfera, y cuya base tuviera por radio la recta* BA *tirada desde el vértice del casquete á la orilla del mismo casquete.*

615 Pero por razon del triángulo rectángulo *ALB*, el círculo cuyo radio fuese la hypotenusa, valdrá la suma de los dos círculos, cuyos radios fuesen los dos lados *AL*, *BL*.

Luego *el sector esférico* CABD *vale la suma de dos conos que tuviesen ambos por altura el radio* BC *de la esfera, y cuyas bases fuesen los dos círculos, cuyos radios son* AL *y* BL.

Por

Digitized by Google

616 Por lo que mira al segmento, como vale el sector *CABD* menos el cono *CAD*, una vez que hemos declarado (*605* y *613*) el método para sacar la solidez de cada uno de estos cuerpos, nada tenemos que decir sobre este punto. Fig.

De la medida de los demás Sólidos.

617 Por lo que mira á los demas sólidos terminados por superficies planas, el método que naturalmente se ofrece para medirlos consiste en considerarlos como formados de pirámides cuyas bases sean dichas superficies planas, y que tengan por vértice comun el uno de los ángulos del sólido de que se trata; pero este método, sobre ser pocas veces el mas acomodado, es menos breve y menos del caso en la práctica que el que vamos á proponer.

618 Llamarémos *prisma truncado* el sólido *ABCDEF* 171. que queda despues de haber separado una parte de un prisma por un plano *ABC* inclinado á la base.

619 *Un prisma triangular truncado se compone de tres pirámides cada una de las quales tiene por base la base* DEF *del prisma, y la primera tiene su vértice en* B, *la segunda en* A, *y la tercera en* C.

Considerando el prisma truncado con alguna atencion se echa de ver que se compone de dos pirámides, la una triangular cuyo vértice estará en el punto *B*, y tendrá por base el triángulo *DEF*: la otra tendrá por base el quadrilátero *ADFC*, y tendrá tambien su vértice en el punto *B*.

Si

Fig. Si se tira la diagonal *AF*, podemos concebir la pirámide quadrangular *BADFC* como compuesta de dos pirámides triangulares *BADF*, *BACF*; pero la pirámide *BADF* es igual en solidez á una pirámide *EADF*, que teniendo una misma base *ADF*, tuviese su vértice en el punto *E*; porque siendo la linea *BE* paralela al plano *ADF*, estas dos pirámides tendrán una misma altura; pero la pirámide *EADF* puede ser considerada como que tiene por base *EDF*, y su vértice en el punto *A*. Tenemos, pues, yá dos de las pirámides de que hemos dicho que se compone el prisma truncado: solo resta probar que la pirámide de *BACF* equivale á una pirámide cuya base fuese tambien *EDF*, y tuviese su vértice en *C*; pero es muy fácil probarlo tirando la diagonal *CD*, y considerando que la pirámide *BACF* ha de ser igual á la pirámide *EDCF*; porque estas dos pirámides tienen sus vértices *B* y *E* en la misma linea *BE* paralela al plano *ACDF* de sus bases; y estas bases *ACF* y *CFD* son iguales, pues son triángulos que tienen una misma base *CF*, y están comprehendidos entre las dos paralelas *AD* y *CF*. Asi la pirámide *BACF* es igual á la pirámide *EDCF*; pero esta se puede considerar como que tiene por base *DEF*, y su vértice en *C*: luego el prisma truncado se compone con efecto de tres pirámides cuya base comun es el triángulo *DEF*, y de las quales la primera tiene su vértice en *B*, la segunda en *A*, y la tercera en *C*.

620 Luego *para sacar la solidez de un prisma triangu-*

gular truncado, se han de bajar desde cada uno de los án- Fig.
gulos de la base superior perpendiculares á la base inferior, y multiplicar la base inferior por el tercio de la suma de dichas tres perpendiculares.

621 Se pueden sacar de esta proposicion muchas consecuencias para la medida de los prismas truncados distintos de los triangulares, y aun de otros sólidos. Si concebimos, por egemplo, que desde todos los ángulos de un sólido terminado por superficies planas, se tiran á un mismo plano, tomándole como se quisiere, perpendiculares, resultarán tantos prismas truncados quantas caras tuviere el sólido. Como es facil medir qualquiera prisma truncado en virtud de lo que acabamos de decir, qualquiera sólido terminado por superficies planas se medirá, pues, con igual facilidad por los mismos principios.

De las razones de los Sólidos en general.

622 Comparar dos sólidos es buscar quantas veces el número de medidas de cierta especie contenidas en el uno de dichos sólidos, contiene el número de medidas de la misma especie que caben en el otro.

623 *Dos prismas, ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro, son entre sí como los productos de su base por su altura.* Esto es evidente, porque cada uno de dichos sólidos es igual al producto de su base por su altura, sea la que fuere la figura de la base.

Luego los prismas, ó los cilindros, ó los prismas y los ci-

Fig. *cilindros de igual altura, son entre sí como sus bases; y los prismas y los cilindros de igual base son entre sí como sus alturas.*

Porque la razon de los productos de las bases por las alturas no muda aunque se suprima en ellos el factor comun que contienen quando la base ó la altura es una misma en ambos sólidos.

Luego dos pirámides qualesquiera, ó dos conos, ó una pirámide y un cono, son entre sí como las alturas, quando son iguales las bases, porque estos sólidos son cada uno el tercio de un prisma de igual base é igual altura (603).

624 ***Las solideces de las pirámides semejantes son entre sí como los cubos de las alturas de dichas pirámides, ó en general como los cubos de dos lineas homólogas de dichas pirámides.***

164. Porque podemos representar dos pirámides semejantes por dos pirámides como *JABCDF*, *Jabcdf*, pues se componen estas dos pirámides de un mismo número de caras semejantes cada una á la suya, y puestas del mismo modo. Ya que dos pirámides son en general como los productos de sus bases por sus alturas, las bases que son en este caso figuras semejantes, siendo entre sí como los quadrados de las alturas *JP*, *Jp* (554), las dos pirámides serán entre sí como los productos de los quadrados de las alturas por las alturas mismas; porque podremos (200) substituir en lugar de la razon de las bases, la de los quadrados de las alturas. Y como las alturas (593) son

pro-

Digitized by Google

proporcionales á todas las demás dimensiones homólogas, sus cubos serán tambien proporcionales á los cubos de estas dimensiones homólogas (198): luego en general dos pirámides semejantes son entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas. Fig.

625 *Luego en general las solideces de dos cuerpos semejantes son entre sí como los cubos de las lineas homólogas de dichos sólidos.*

Porque los sólidos semejantes se pueden dividir en un mismo número de pirámides semejantes cada una á la suya; y como dos qualesquiera de estas pirámides serán entre sí en la misma razon, pues son entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas, que guardan la misma razon que otras dos dimensiones homólogas, se infiere que la suma de las pirámides del primer sólido será á la suma de las pirámides del segundo, tambien en razon de los cubos de las dimensiones homólogas.

Luego las solideces de las esferas son entre sí como los cubos de sus radios ó de sus diámetros.

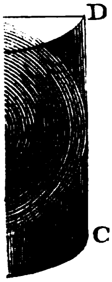
Luego acordándose de todo lo dicho hasta aqui, se vé 1.° *que los contornos de las figuras semejantes guardan la razon simple de las lineas homólogas.* 2.° *que las superficies de las figuras semejantes son entre sí como los quadrados de los lados ó de las lineas homólogas.* 3.° *que las solideces de los cuerpos semejantes son entre sí como los cubos de las lineas homólogas.*

Asi, si dos cuerpos semejantes, pongo por caso, dos

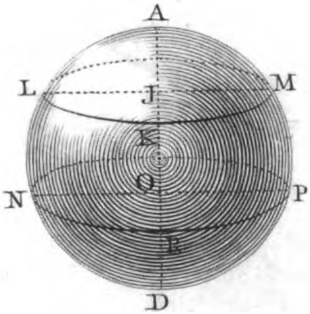
Digitized by Google

Fig. esferas tuviesen sus diámetros en la razon de 1 á 3, las circunferencias de sus círculos máximos serian tambien en razon de 1 á 3; las superficies de dichas esferas serian como 1 á 9, y las solideces como 1 á 27: quiero decir, que la circunferencia de uno de los círculos máximos de la segunda valdria tres veces la de un círculo máximo de la primera, la superficie de la segunda valdria 9 veces la de la primera; y finalmente la segunda esfera valdria 27 esferas como la primera.

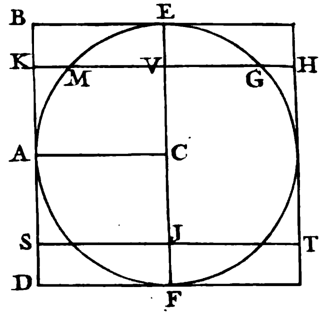
Luego para hacer un sólido semejante á otro, y cuya solidez sea á la de este en una razon dada, pongo por caso, como 2 : 3; se le han de dar dimensiones tales, que el cubo de una qualquiera de dichas dimensiones sea al cubo de una dimension homóloga del sólido, al qual ha de ser semejante, como 2 á 3. Por egemplo, si hay una esfera que tenga 8 pulgadas de diámetro, y se pregunta qual ha de ser el diámetro de una esfera que fuese los $\frac{2}{3}$ de la primera, se habrá de buscar el quarto término de esta proporcion 1 : $\frac{2}{3}$ ó 3 : 2 :: el cubo de 8, esto es, 512 es á un quarto término, que es 341$\frac{1}{3}$ que será el cubo del diámétro que se busca; por lo que, sacando la raiz cúbica (164) saldrá 6^p, 99 para el diámetro; esto es, 7^p, con muy poca diferencia, como es facil verificarlo de este modo. Busquemos quales son las solideces de dos esferas, la una de 8, y la otra de 7 pulgadas de diámetro. La circunferencia de sus círculos máximos se hallará por medio de estas dos proporciones (504):



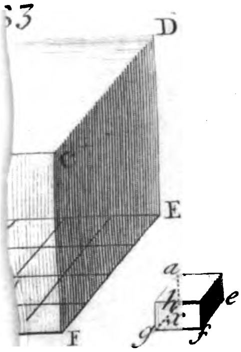
160



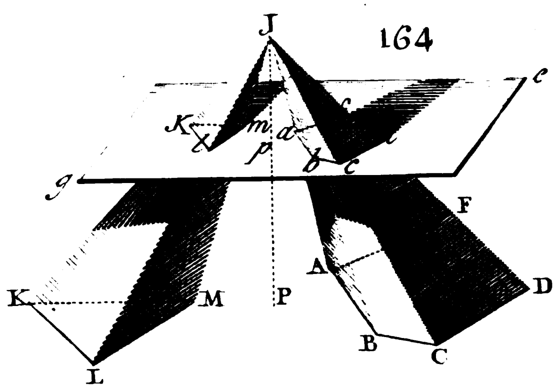
161



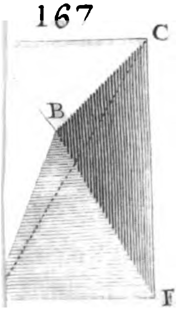
63



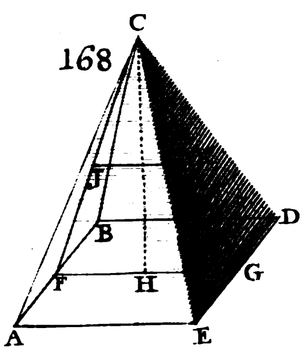
164



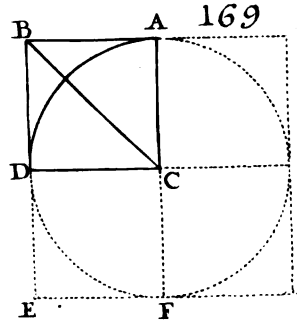
167



168



169



Digitized by Google

Fig.

$7 : 22 :: 8 :$

$7 : 22 :: 7 :$

Los quartos términos son $25\frac{1}{7}$ y 22 : multiplicando estas circunferencias cada una por su diámetro, saldrán las superficies de dichas esferas (578), que por consiguiente serán $201\frac{1}{7}$ y 154 : finalmente multiplicando estas superficies por el $\frac{1}{3}$ de su radio, esto es respectivamente por el $\frac{1}{6}$ de 8 y de 7, saldrán las solideces $268\frac{4}{21}$ y $179\frac{2}{3}$, cuya razon es la misma que la de $\frac{5632}{21}$ á $\frac{539}{3}$; reduciendo estos quebrados, ó (multiplicando los dos términos del último por 7, y omitiendo el denominador comun) la misma que la de 5632 á 3773; pero (171) la razon de estas dos cantidades es $1\frac{1859}{3773}$; esto es, reduciendolo á decímales 1, 49; y la razon de 3 á 2 es 1, 5 ó 1, 50 (120); la diferencia no es pues mas que de $\frac{1}{100}$; esta diferencia proviene de que el diámetro no está sacado sino por aproximacion; por otra parte la razon de 7 á 22 no es cabal la del diámetro á la circunferencia.

De los Cuerpos regulares.

626 En los sólidos terminados por planos, quales son los prismas y las pirámides, se reparan ángulos sólidos. Llámase *ángulo sólido* un espacio sólido terminado en punta por muchos ángulos planos que concurren en un punto comun. La punta de una pirámide es un ángulo sólido, y lo es tambien la esquina de un dado.

627 Se necesitan por lo menos tres ángulos planos

Digitized by Google

Fig. para formar un ángulo sólido, y *quando un ángulo sóli-*
172. *do* A *resulta del concurso de tres ángulos planos, dos ángulos planos* BAD, DAC *los que se quisiere, son mayores que el tercero* CAB.

Tírese á arbitrio la linea *BC*, y hagase el ángulo *BAE* igual á *BAD*, y la linea *AD* igual á *AE*: tírese *BD*, que será igual á *BE*, por ser iguales los triángulos *BAD*, *BAE* (410): tírese tambien *CD*. En virtud de esto, los triángulos *DAC*, *CAE* tienen los lados *DA* y *AE* iguales entre sí, y el lado *AC* es comun, la base *DC* del primero es mayor que *CE* base del segundo, porque las lineas *BD*, *DC* juntas son mayores que la *BC*: luego si de la suma de aquellas se quita la linea *BD*, y de la linea *BC* se quita *BE*, que es igual á *BD*, resultará por una parte *DC* mayor que la *CE* que resulta por la otra: luego el ángulo *CAE* será menor que *DAC*, y el total *BAC* será menor que la suma de los dos ángulos *BAD* y *DAC*.

628 *Todos los ángulos planos juntos que forman un ángulo sólido, valen menos que quatro ángulos rectos.*

Valgámonos para probar esta proposicion de una pí-
173. rámide pentagonal *ABCDEF*, cuya base está dividida en cinco triángulos, cuyo vértice está en el punto *G*, que está á la parte interior del pentágono. Hemos de probar, que los cinco ángulos planos que forman el ángulo sólido *A*, valen menos que quatro rectos.

Ya que es pentagonal la pirámide, tiene cinco caras que son otros tantos triángulos, cuyo vértice está en *A*: el el pentágono de la base se compone tambien de cinco triángulos : luego la suma de los cinco primeros triángulos es igual á la suma de los otros cinco. Sentado esto, considérese que los ángulos de los cinco primeros triángulos son los que están en la base, como *ACB* y *ACD*, mas los que están en el vértice de la pirámide; y los ángulos de los otros cinco triángulos son los del pentágono, como *BCD*, mas los que están en el punto *G*. Por consiguiente si los ángulos que están en la base son mayores que los del pentágono, es preciso que los ángulos que están en el vértice de la pirámide valgan menos que los que están en el punto *G*. Pero los ángulos que están en la base de la pirámide son mayores que los del pentágono : por egemplo, los dos ángulos *ACB* y *ACD* son mayores que el tercero *BCD*, porque como estos tres ángulos planos forman el ángulo sólido en *C*, la suma de dos de ellos es mayor que el otro (627): luego los ángulos del vértice de la pirámide valen menos que los que están en el punto *G*. Pero los ángulos cuyo vértice está en *G*, valen juntos (299) quatro ángulos rectos : luego los del vértice de la pirámide valen menos que quatro ángulos rectos.

Fig.
1

629 Fundados en esta proposicion probarémos que no puede haber sino cinco cuerpos regulares. Llámanse *cuerpos regulares* aquellos cuyas caras son todas polygonos regulares, iguales y semejantes, y cuyos ángulos sólidos están formados por igual número de ángulos planos.

630 1.° Quando el ángulo sólido resulta del con-

Digitized by Google

Fig. curso de tres ángulos planos de triángulos equiláteros, el sólido se llama *tetraedro*. No hay duda en que *tres ángulos planos de triángulos equiláteros pueden formar un ángulo sólido*; pues valiendo $60°$ grados cada ángulo de un triángulo equilátero, la suma de tres valdrá $180°$, y por consiguiente valdrá menos que quatro ángulos rectos.

174. La figura representa un *tetraedro*, y los quatro triángulos equiláteros, que componen todo el sólido.

631 2.° *Quatro ángulos de triángulos equiláteros pueden formar tambien un ángulo sólido*; porque como estos quatro ángulos juntos no valen sino $240°$ valen menos que quatro ángulos rectos. El sólido en quien concurre esta circunstancia, se llama *octaedro*, y le representa la figura con
175. los ocho triángulos equiláteros, que componen todo el sólido.

632 3.° *Cinco ángulos de triángulos equiláteros pueden tambien formar un ángulo sólido*; porque la suma de estos cinco ángulos no llega á valer quatro ángulos rectos.

176. En el *icosaedro* cada ángulo sólido resulta del concurso de cinco ángulos de triángulos equiláteros: la figura representa este sólido con los veinte triángulos equiláteros que le componen.

Pero como seis ángulos de triángulos equiláteros valen juntos quatro ángulos rectos, no pueden formar un ángulo sólido: luego no puede haber mas de tres especies de cuerpos regulares formados por triángulos.

633 4.° *Tres ángulos de quadrado pueden tambien for-*

formar un ángulo sólido; y esta circunstancia concurre en Fig.
el *cubo* ó *exaedro*, que se vé en la figura con los seis qua- 177.
drados que le componen.

Es evidente, que quatro ángulos de quadrado no pueden formar un ángulo sólido, por valer todos juntos quatro ángulos rectos; por consiguiente no hay sino una especie de cuerpo regular formado por quadrados.

634 5.° *Un ángulo sólido puede resultar del concurso de tres ángulos de pentágono regular*; porque cada uno de dichos ángulos no vale sino 108°. El *dodecaedro* es un cuerpo cuyos ángulos sólidos resultan del concurso de tres
ángulos de pentágono regular, y le representa la figura con 178.
los doce pentágonos regulares de que se compone.

Como quatro ángulos de pentágonos regulares valen mas de 360°, no pueden formar un ángulo sólido: luego no puede haber mas de un cuerpo regular formado por pentágonos.

635 *No se puede formar cuerpo alguno regular con exágonos*; porque el ángulo del exágono regular vale 120°, y tres juntos han de valer 360°: luego no pueden formar un ángulo sólido. Y como tres ángulos de los demas polygonos de mayor número de lados que el exágono, han de valer mas de 360°, se infiere que con ningun polygono regular que tenga mas de cinco lados se puede formar cuerpo regular alguno. Luego no hay mas que cinco cuerpos regulares.

Digitized by Google

Fig.

De la medida de la superficie y solidez de los cinco Cuerpos regulares.

636 Para hallar la superficie de cada uno de los cinco cuerpos regulares, se buscará la area de uno de los planos que le terminan, cuya area se multiplicará por el número de caras que tuviere cada cuerpo.

Una vez que el tetraedro no es otra cosa mas que una pirámide triangular equilátera, hallarémos su solidez en virtud de lo dicho (573).

Tambien se hallará la solidez del cubo ó hexaedro por lo dicho (599).

Para hallar la del octaedro, investigarémos la solidez de cada una de las dos pirámides iguales y semejantes en que se divide dicho solido.

Del mismo modo hallarémos la solidez del dodecaedro. Porque tirando lineas rectas desde el centro del dodecaedro á todos sus ángulos, resultarán doce pirámides pentagonales iguales; multiplicando despues la solidez de una de dichas pirámides por 12, sacarémos la solidez total del dodecaedro.

Buscando la solidez de una de las veinte pirámides en que podemos concebir dividido tambien el icosaedro, y multiplicándola por 20, resultará la solidez total del icosaedro.

ELE-

Digitized by Google

Fig.

ELEMENTOS
DE TRIGONOMETRÍA PLANA.

637 Esta voz *Trigonometría* significa medida de los triángulos, porque enseña la Trigonometría el arte de aplicar el cálculo arismético á la Geometría, arte de todo punto necesaria para pasar de la teórica á la práctica; porque, segun se vió yá en la Geometría, para medir las figuras es preciso reducirlas primero á triángulos.

638 En qualquier triángulo hay seis cosas que considerar; es á saber, tres ángulos y tres lados. Segun que estas seis cosas están todas en un mismo plano, ó en planos diferentes, es la *Trigonometría* ó *plana* ó *esférica*. Esta última no nos importa por ahora; y así nos ceñirémos á la Trigonometría plana, què tambien se llama *rectilinea*, cuyo fin es enseñar cómo se satisface en todos los casos posibles á esta pregunta: *Conociendo tres de las seis cosas que en un triángulo rectilineo se consideran (ángulos y lados), hallar el valor de las otras tres.*

He dicho en todos los casos posibles, porque si no conociésemos sino los tres ángulos, por egemplo, no se podria determinar el valor de los lados. Con efecto, si por un punto *D*, tomado á arbitrio en el lado *AB* del triángulo *ABC*, 179.
cuyos tres ángulos supongo conocidos, se tira *DE* paralela á *BC*, resultará otro triángulo *ADE*, que tendrá los mismos ángulos que el triángulo *ABC* (329); y se echa

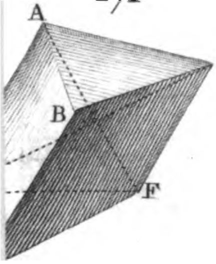
Fig. echa de ver que del mismo modo se podrian formar infinitos que tendrian los mismos ángulos. Sería, pues, preciso que el cálculo sacado en virtud de los tres ángulos conocidos, diese el valor de una infinidad de lados diferentes.

En este caso es el problema absolutamente indeterminado: quiero decir que admite un número infinito de resoluciones. No obstante, declararémos en adelante el modo con que se puede determinar en este caso la razon que hay entre los tres lados, aunque no se pueda señalar su valor.

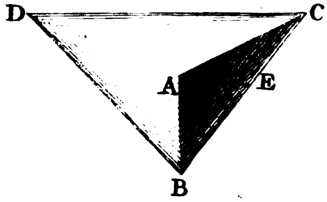
Pero siempre que de las tres cosas conocidas fuese la una un lado, se podrán determinar todas las demás, excepto un caso en que ha de quedar una cosa por determinar,
180. y es el siguiente. Supongamos que en el triángulo *ABC* sean conocidos los dos lados *AB* y *BC*, y el ángulo *C* opuesto al uno de dichos lados; no se puede determinar el valor del ángulo *A*, ni el del lado *AC*, sino en quanto se supiere si el ángulo *A* es obtuso ú agudo; porque si se concibe que desde el punto *B* como centro, y con un radio igual al lado *BA*, se describe un arco *DA*, y que por el punto *D* donde este arco encuentra *AC*, se tira *BD*, resultará otro triángulo *CBD*, en el qual se conocerán las mismas cosas que son conocidas en el triángulo *ABC*; es á saber, el ángulo *C*, el lado *CB*, y el lado *BD* igual á *BA*. Hay pues en este caso los mismos datos para determinar el ángulo *BDC* que habia en el triángulo *ABC*, para determinar el ángulo *A*.

Hay sin embargo entre este caso y el antecedente la di-

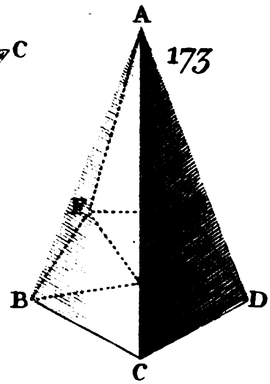
171

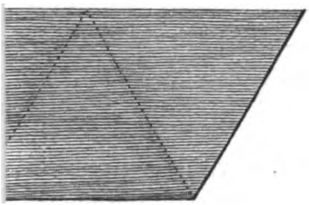


121

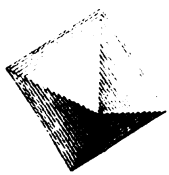


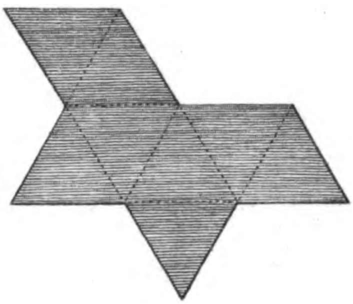
173



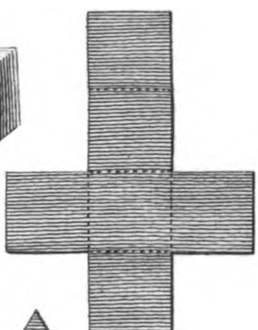


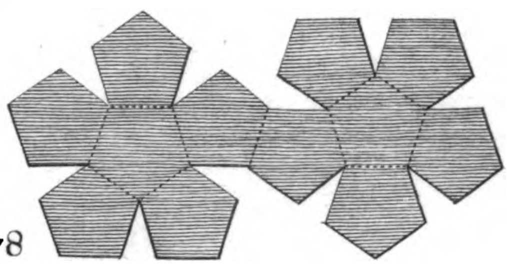
175





177





178

Digitized by Google

Digitized by Google

diferencia de que se puede determinar aquí el valor del ángulo *A*, y el del ángulo *BDC*, conforme lo manifestarémos en adelante. No hay mas dificultad que la de saber quál de estos dos valores se deba escoger, y por consiguiente quál deba ser la figura del triángulo. Es, pues, indispensable saber, además de las tres cosas conocidas, si el ángulo que se busca ha de ser agudo ú obtuso. Se ha de reparar de paso que los dos ángulos *A* y *BDC* de que se trata, son suplemento el uno del otro; porque *BDC* es suplemento de *BDA*, qne es igual al ángulo *A*, por ser isósceles el triángulo *ABD*. Fig.

639 No se hace uso para calcular los triángulos, de los ángulos mismos. En lugar de los ángulos ó de los arcos que los miden, se substituyen varias lineas rectas llamadas *senos*, *tangentes*, *cosenos*, &c, que representan estos arcos, y que sin serles proporcionales, son á propósito para representarlos, y son fuera de esto mas acomodadas para los cálculos; porque, conforme se verá bien presto, son proporcionales estas lineas á los lados de los triángulos. Conduce pues antes de pasar adelante, declarar quáles son estas lineas, y cómo pueden suplir por los ángulos.

De los Senos, Cosenos, Tangentes, Cotangentes, Secantes, y Cosecantes.

640 La perpendicular *AP* tirada desde el estremo de un arco *AB* sobre el radio *BC*, que pasa por el otro estremo *B* de dicho arco, se llama el *seno recto* ó simplemen- 181.

Fig. mente el *seno* del arco *AB* ó del ángulo *ACB*.

181. La porcion *PB* del radio, comprehendida entre el seno y el estremo del arco, se llama el *seno verso*.

La parte *BD* de la perpendicular al estremo del radio, interceptada entre este radio *BC* y el radio *CA* prolongado, se llama la *tangente* del arco *AB* ó del ángulo *ACB*.

La linea *CD* que no se distingue del radio *CA* prolongado hasta la tangente, se llama *secante* del arco *AB*, ó del ángulo *ACB*.

Si se tira el radio *CF* perpendicular á *CB*, y sobre su estremo *F* la perpendicular *FE*, que encuentra en *E* el radio *CA* prolongado, y si finalmente se tira *AQ* perpendicular á *CF*, se infiere de las definiciones antecedentes que *AQ* será el seno, *FQ* el seno verso, *FE* la tangente, y *CE* la secante del arco *AF*, ó del ángulo *ACF*.

Pero como el ángulo *ACF* es complemento de *ACB*, pues estos dos ángulos juntos componen un ángulo recto, se puede decir que *AQ* es el seno del complemento, *FQ* el seno verso del complemento, *FE* la tangente del complemento, y *CE* la secante del complemento del arco *AB* ó del ángulo *ACB*.

Para ahorrar palabras han convenido los Matemáticos en decir *coseno*, en lugar de seno del complemento del arco: *coseno verso*, en lugar de seno verso del complemento: *cotangente*, en lugar de tangente del complemento; y *cosecante*, en lugar de secante del complemento. De manera ra que las lineas *AQ*, *FQ*, *FE*, *CE* se llamarán el coseno, el coseno verso, la cotangente y la cosecante del arco *AB*, ó del ángulo *ACB*. Igualmente las lineas *AP*, *BP*, *BD* y *CD* se podrán llamar el coseno, el coseno verso, la cotangente y la cosecante del arco *AF*, ó del ángulo *ACF*; porque *AB* es complemento de *AF*, del mismo modo que *AF* lo es de *AB*. Fig. 181.

Quando, tratándose de un ángulo ó de un arco, quisiéremos nombrar estas lineas, pondremos antes de las letras que sirven para nombrar dicho ángulo ó dicho arco, las expresiones abreviadas sen, cos, tang, cot; así sen *AB* significará el seno del arco *AB*: sen *ACB* significará el seno del ángulo *ACB*. Asimismo cos *AB*, cos *ACB* significarán el coseno del arco *AB*, el coseno del ángulo *ACB*; y para representar el radio usarémos de la letra *R*.

641. Es evidente 1.° *que el coseno* AQ *de un arco qualquiera* AB, *es igual á la parte* CP *del radio, comprehendida entre el centro y el seno.*

2.° *Que el seno verso* BP *es igual á la diferencia entre el radio y el coseno,*

3.° *Que el seno de un arco qualquiera* AB *es la mitad de la cuerda* AG *de un arco doble* ABG. Porque siendo el radio *CB* perpendicular á la cuerda *AG*, divide esta cuerda y su arco en dos partes iguales (349 y 352).

642 De esta última proposicion resulta que *el seno de* 30° *vale la mitad del radio*; porque ha de ser la mitad de la cuerda de 60°, ó del lado del exágono, que segun de-

Fig. demostramos (446) es igual al radío.

181. 643 *La tangente de 45° es igual al radio.* Porque si el ángulo *ACB* es de 45°, como el ángulo *CBD* es recto, el ángulo *CDB* valdrá tambien 45°, pues todos los tres ángulos juntos de un triángulo valen dos rectos (393): luego el triángulo *CBD* será isósceles, y por consiguiente será *BD* igual á *CB*.

644 Al paso que el arco *AB* ó el ángulo *ACB* crece, crece tambien su seno *AP*; pero mengua su coseno *AQ* ó *CP*; y en llegando el arco *AB* á valer 90°, se confunde el seno *AP* con el radio *FC*, y el coseno es cero; porque en llegando el punto *A* á confundirse con el punto *F*, es cero la perpendicular *AQ*.

Por lo que mira á la tangente *BD*, y á la cotangente *FE*, salta á la vista que la tangente *BD* vá creciendo continuamente, y que la cotangente vá menguando: de modo que quando llega el arco *AB* á valer 90°, es infinita su tangente, y su contangente es cero. Con efecto, quanto mas crece el arco *AB*, tanto mas se levanta el punto *D* respecto de *BC*; y quando el punto *A* está infinitamente cerca de *F*, las dos lineas *CD* y *BD* son quasi paralelas, y no se encuentran sino á una distancia infinita: luego *BD* es entónces infinita: luego lo es quando el punto *A* se confunde con el punto *F*.

645 De donde resulta, que *quando el arco vale 90°, su seno es igual al radio, su coseno es cero, su tangente es infinita, y su cotangente es cero.*

Por

Por ser el seno de 90° el mayor de todos los senos, se llama *seno total*; de suerte que el seno de 90^6, el radio, y el seno total, son una misma cosa. Fig.

646 Quando el arco *AB* coge mas de 90°, su seno *AP* mengua, y su coseno *AQ* ó *CP*, que entónces cae al otro lado del centro respecto del punto *B*, crece hasta que el arco *AB* llega á valer 180°, en cuyo caso el seno es cero, y el coseno es igual al radio *CH*. Tambien se echa de ver que el seno *AP* y el coseno *CP* del arco *AB*, ó del ángulo *ACB*, que vale mas de 90°, son igualmente el seno y el coseno del arco *AH*, ó del ángulo *ACH*, que no llega á 90°, y es suplemento del primero: de suerte que *el seno y el coseno de un ángulo obtuso no se distinguen del seno y coseno de su suplemento*; pero es de advertir que el coseno cae á la parte opuesta donde caeria si el arco *AB* ó el ángulo *ACB* no llegára á los 90°. 182.

Por lo que mira á la tangente, como la determina el concurso de la perpendicular *BD* con el radio *CA* prolongado, se echa de ver que quando el arco *AB* coge mas de 90°, la tangente es *BD*; pero levantando la perpendicular *HI*, se percibe desde luego que el triángulo *CBD* es igual al triángulo *CHI*, y que por consiguiente *BD* es igual á *HI*. 182.

647 Luego *la tangente de un arco, que coge mas de* 90°, *no se distingue de la tangente de su suplemento*: no hay mas diferencia sino que está debajo del radio *BC*. En quanto á la cotangente *EF*, es tambien la misma que la

co-

Fig. cotangente del suplemento, y cae á la parte opuesta donde caería si el arco *AB* ó el ángulo *ACB* no llegára á los 90°. Con mucha facilidad probaríamos tambien que la tangente de 180° es cero, y la cotangente es infinita.

648 Sentado esto, supongamos que el quarto de cir-
181. cunferencia *BF* esté dividido en arcos de 1′, esto es, en 5400 partes iguales, y que desde cada punto de division se bajen perpendiculares ó senos, como *AP*, sobre el radio *BC*. Concibamos tambien este radio *BC* dividido en un número muy crecido de partes iguales, pongo por caso, en 100000, cada perpendicular contendrá un cierto número de partes del radio; y así, si por algun medio se pudiera conseguir determinar el número de partes de cada una de dichas perpendiculares, es evidente que podrian servir para fijar la cantidad de los ángulos: de suerte que si, habiendo puesto en órden en una columna todos los minutos desde cero hasta 90°, se escribiese en otra columna al lado, y en frente de cada minuto el número de partes de la perpendicular correspondiente, se podria señalar por medio de esta tabla qual es el número de grados de un ángulo respecto del qual se conociese el número de partes del seno, ó de la perpendicular correspondiente, y recíprocamente conociendo el número de grados y partes de grado del ángulo, se podria determinar el número de las partes de su seno. Resultaría esta utilidad de dicha tabla, no solo respecto de los arcos ó ángulos cuyo radio tuviese el mismo número de partes que se hubiesen su-

supuesto en el radio, en virtud del qual se hubiese construido dicha tabla; sino tambien respecto de otro qualquiera cuyo radio fuese conocido. Por egemplo, supongamos un ángulo *DCG*, cuyo lado ó radio *CD* sea de 8 pies, y la perpendicular *DE* de 3 pies; é imaginemos que sea *CA* el radio por el qual se han construido las tablas; si imaginamos el arco *AB* y la perpendicular *AP*, esta perpendicular será el seno de las tablas; y me será facil saber de quantas partes consta esta perpendicular, porque como los triángulos *CDE*, *CAP* son semejantes (por causa de las paralelas *DE* y *AP*), tendré (459) *CD* : *DE* : : *CA* : *AP*; esto es, 8 P : 3 P :: 100000 : *AP*. Sacaré, pues, (183) que *AP* vale 37500; y solo me faltará buscar este número en las tablas entre los senos, y al lado hallaré el número de grados, y minutos del ángulo *DCG* ó *DCE*.

Fig. 183.

Recíprocamente, si se supiese de quantos grados y minutos es el ángulo *DCG*, y la cantidad de su radio *CD*, se determinaría igualmente el valor de la perpendicular *DE*; porque conociendo los grados y minutos que abraza este ángulo, se hallaría en la tabla qué número de partes contiene la perpendicular *AP*, ó el seno *AP* que corresponde á dicho número de grados, y entónces en virtud de los triángulos semejantes *CAP*, *CDE*, se formaría esta proporcion *CA* : *AP* : : *CD* : *DE*, por cuyo medio seria facil calcular *DE*, pues los tres primeros términos *CA*, *AP* y *CD* son conocidos; es á saber *CA* y *AP* por las tablas, y *CD* por saberse de quantos pies consta.

Digitized by Google

Fig. Con esto se vé quáles son las lineas que arriba digimos (639) poderse substituir en lugar de los ángulos en el cálculo de los triángulos : estas lineas son los senos.

649 Pero no son solos los senos los que sirven: sirven igualmente las tangentes, y aun las secantes. Es facil calcular estas lineas una vez que estén calculados todos los

181. senos ; porque como el triángulo CPA, y el triángulo CBD son semejantes, se pueden inferir de ellos estas dos proporciones:

$$CP : PA :: CB : BD$$

$$\text{y } CP : CA :: CB : CD$$

Esto es (considerando que $CP = AQ$)

$$\cos AB : \text{sen } AB :: R : \text{tang } AB$$

$$\text{y } \cos AB : R :: R : \sec AB.$$

Pero ya se vé que en cada una de estas dos proporciones los tres primeros términos son conocidos quando son conocidos todos los senos ; pues el coseno de un arco no es otra cosa que el seno del complemento de dicho arco. Será, pues, facil inferir (183) el valor de el quarto término de cada una ; y por consiguiente el de las tangentes y de las secantes, como tambien el de las cotangentes y cosecantes, que no son mas que tangentes y secantes del complemento.

650 No solo sirven las dos últimas proporciones para el cálculo de las tangentes y de las secantes, sino que tambien son de muchísimo uso para otros asuntos, conforme se verá en varias ocasiones. La segunda proporcion, por egemplo, nos proporciona inferir una propiedad muy socor-

Digitized by Google

corrida, que es la siguiente. Del mismo modo que hemos demostrado que cos *AB* : *R* : : *R* : sec *AB*, se demostrará respecto de otro arco qualquiera *BO*, que cos *BO* : *R* : : *R*: sec *BO*; pero ya que estas dos proporciones tienen unos mismos términos medios, tendrán iguales los productos de sus estremos (182): luego se puede (184) formar con los estremos de la una y de la otra una nueva proporcion, que tendra por estremos los estremos de la una, y por medios los estremos de la otra: de suerte que tendrémos cos *AB* : cos *BO* : : sec *BO* : sec *AB*; de lo que se inferirá que *los cosenos de dos arcos son entre sí en razon recíproca ó inversa de sus secantes.* Fig. 181.

651 Declararé aqui otra proporcion util en muchos casos, de la qual se inferirá del mismo modo que *las tangentes de dos arcos son en razon inversa de sus cotangentes*: los triángulos *CBD*, *CFE* son semejantes, porque ademas del ángulo recto en *B* y en *F*, es el ángulo *DCB* igual á *CEF* por razon de las paralelas *CB*, *EF*; tendrémos, pues, *BD* : *CB* : : *CF* : *FE*, esto es, tang *AB* : *R* : : *R* : cot *AB*; del mismo modo probaríamos tambien que tang *BO* : *R* : : *R* : cot *BO*, y por consiguiente tang *AB*: tang *BO* : : cot *BO* : cot *AB*.

Los libros donde se hallan los valores de todas las líneas de que acabamos de hablar, se llaman *tablas de senos*: contienen no solo los valores numéricos de todas las espresadas lineas, mas tambien sus logaritmos, de los quales se hace uso lo mas que se puede en lugar de los valo-

Digitized by Google

Fig. res numéricos. Las mismas tablas contienen tambien los logaritmos de los números naturales.

Antes que pasemos á declarar los usos de estas tablas pára la resolucion de los triángulos, nos toca tratar de su formacion, esto es, del método por el qual se han calculado ó podido calcular los senos &c.

Nos detendrémos tanto mas gustosos en esto, quanto nos servirán en otras partes las proposiciones que con este motivo vamos á demostrar.

652 *Para hallar el coseno de un arco, cuyo seno es conocido*, se debe restar el quadrado del seno del quadrado del radio, y sacar la raiz quadrada de la resta. Porque el
181. coseno *AQ* es igual á *PC*, que es lado del ángulo recto en el triángulo rectángulo *APC*, cuya hypotenusa *AC*, y el lado *AP* son entónces conocidos.

Así, si se pidiese el coseno de $30°$, ya que hemos visto (642) que este seno es la mitad del radio, que aquí suponemos de 100000 partes, este seno sería 50000: restando su quadrado 2500000000 del quadrado 10000000000 del radio, sale 7500000000, cuya raiz quadrada 86603 es el coseno de $30°$, ó el seno de $60°$.

653 *Conociendo el seno de un arco* AB *para hallar*
184. *el de su mitad*, se debe empezar por calcular el coseno *PC* de este primer arco: calculado este coseno, se restará del radio, de lo que resultará el seno verso *BP*; se quadrará el valor de *BP*, se juntará este quadrado con el quadrado

do del seno *AP*, la suma será (517) el quadrado de la cuerda *AB*; sacando la raiz quadrada de esta suma, saldrá *AB*, cuya mitad es el seno *BI* del arco *BD* mitad de *AB* (641). Fig.

654 *Conociendo el seno* BI *de un arco* BD, *para hallar el seno* AP *del duplo* AB *de dicho arco*, se calculará el coseno *CJ* de *BD*, y se formará esta proporcion *R* : cos *BD* : : 2 sen *BD* : sen *ADB*, cuyos tres primeros términos serán entonces conocidos, y será facil calcular el quarto. 184.

Fúndase esta proporcion en que los dos triángulos *CBI* y *BAP* son semejantes; porque además del ángulo recto en *P* y en *I*, tienen el ángulo *B* comun; asi tenemos *CB*: *CJ* : : *AB* : *AP*. Pero (641) *CI* es el coseno de *BD*, y *AB* el duplo de *BI* seno de *BD*; *AP* es el seno de *ADB*, y *CB* es el radio: luego *R* : cos *BD* : : 2 sen *BD*: sen *ADB*.

655 Conociendo los senos *BQ*, *DP* de dos arcos *AB*, *AD*, 1.° *para hallar el seno de su suma*, es menester despues de calculados los cosenos (652) de ambos arcos, multiplicar el seno del primero por el coseno del segundo, y el seno del segundo por el coseno del primero. La suma de estos dos productos dividida por el radio será el seno de la suma de dichos dos arcos. 185.

2.° La diferencia de los mismos productos dividida por el radio, será el seno de la diferencia de los mismos arcos.

Para probarlo, prolónguese el seno *DP* del arco *AD*,

Digitized by Google

Fig. hasta que encuentre en el punto R el radio CB que pasa por el estremo B del arco AB : tírese la recta DL perpendicular al mismo radio CB, cuya perpendicular será el seno (640) de la suma de los dos arcos DA, AB, ó del arco BAD, y su coseno será CL.

Por ser BQ y RP ambas perpendiculares á AC, serán paralelas entre sí, y serán semejantes los triángulos CBQ, CRP, de los quales sacarémos $CQ : QB :: CP : PR$; ó $\cos AB : \text{sen } AB :: \cos AD : PR = \frac{\cos AD \times \text{sen } AB}{\cos AB}$. Los triángulos BQC, RDL que tienen todos sus lados perpendiculares, cada uno al suyo, serán semejantes (462 y 465), y darán $BC : QC :: DR : DL$; ó $R : \cos AB :: \text{sen } AD + \frac{\cos AD \times \text{sen } AB}{\cos AB} : \text{sen } (AB + AD) = \ldots\ldots \frac{\text{sen } AB \times \cos AD + \text{sen } AD \times \cos AB}{R}$.

2.° Para probar la segunda parte de la proposicion, considerarémos BD como el arco mayor, y el arco AB como el menor. De los triángulos CQB, CLO, cuyos lados son perpendiculares cada uno al suyo, sacarémos $CQ : QB :: CL : LO$; ó $\cos AB : \text{sen } AB :: \cos BD : LO = \frac{\text{sen } AB \times \cos BD}{\cos AB}$. Luego $DO = \text{sen } BD - \frac{\cos BD \times \text{sen } AB}{\cos AB}$. Ademas de esto los dos triángulos semejantes DPO, CQB dan $CB : CQ :: DO : DP$; ó $R : \cos AB :: \text{sen } BD - \frac{\cos BD \times \text{sen } AB}{\cos AB} : \text{sen } (BD - AB) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{sen } BD \times \cos AB - \text{sen } AB \times \cos BD}{R}$.

656 *Para hallar el coseno de la suma ó de la diferencia de dos arcos cuyos senos son conocidos*, es preciso despues de calculados los cosenos de cada uno de ellos (652) mul-

multiplicar estos dos cosenos uno por otro, y multiplicar Fig. igualmente ambos senos. Hecho esto, se restará el segundo producto del primero, y dividiendo la resta por el radio, saldrá el coseno de la suma de los dos arcos. Al contrario para hallar el coseno de la diferencia, se juntarán los dos productos espresados, y se partirá la suma por el radio.

1.° Porque los triángulos semejantes CQB, DPO dan $CQ : QB :: DP : PO$; ó $\cos AB : \text{sen } AB :: \text{sen } AD : PO = \frac{\text{sen } AB \times \text{sen } AD}{\cos AB}$: luego $CO = \cos AD - \frac{\text{sen } AB \times \text{sen } AD}{\cos AB}$; pero de los triángulos semejantes CQB, CLO sacamos tambien $CB : CQ :: CO : CL$; ó $R : \cos AB :: \cos AD - \frac{\text{sen } AB \times \text{sen } AD}{\cos AB} : \cos (AD + AB) = \ldots\ldots\ldots \frac{\cos AD \times \cos AB - \text{sen } AB \times \text{sen } AD}{R}$.

2.° Si consideramos el arco BD como el mayor y el arco AB como el menor, es evidente que será CP el coseno de la diferencia de dichos arcos. Los triángulos CQB, DLR que tienen sus lados perpendiculares, cada uno al suyo, serán semejantes y darán $CQ : QB :: DL : LR$; ó $\cos AB : \text{sen } AB :: \text{sen } BD : LR = \frac{\text{sen } BD \times \text{sen } AB}{\cos AB}$; luego CR ó $CL + LR = \cos BD + \frac{\text{sen } BD \times \text{sen } AB}{\cos AB}$, y por causa de los triángulos semejantes CQB, CPR tendrémos $CB : CQ :: CR : CP$; ó $R : \cos AB :: \cos BD + \frac{\text{sen } BD \times \text{sen } AB}{\cos AB} : \cos (BD - AB) = \frac{\cos BD \times \cos AB + \text{sen } BD \times \text{sen } AB}{R}$.

657 *La suma de los senos de dos arcos* AB, AC *es* 186. *á la diferencia de los mismos senos, como la tangente de la semisuma de dichos dos arcos es á la tangente de la mitad de su diferencia*; esto es, sen AB + sen AC : sen AB —

Fig. sen AC : : tang $\frac{AB + AC}{2}$: tang $\frac{AB - AC}{2}$.

Despues de tirado el diámetro AM, llévese el arco AB desde A á D : tírese la cuerda BD, que será perpendicular á AM (350). Por el punto C, tírese CP perpendicular, y CF paralela á AM. Desde el punto F tírense las cuerdas FB y FD, y con un radio FG igual al del círculo BAD descríbase el arco IGK que encuentra CF en G, y en el punto G levántese HL perpendicular á CF : las lineas GH y GL son las tangentes de los ángulos GFH y GFL, ó CFB y CFD, que teniendo sus vértices en la circunferencia, tienen por medida la mitad de los arcos CB y CD, sobre los quales descansan (372); esto es, la mitad de la diferencia BC, y la mitad de la suma CD de los dos arcos AB, AC. Así GL y GH son las tangentes de la mitad de la suma y de la mitad de la diferencia de estos mismos arcos.

Sentado esto, es evidente que siendo DS igual á BS, la linea DE vale $BS + SE$, ó $BS + CP$; esto es, la suma de los senos de los arcos AB, AC; igualmente BE vale $BS - SE$, ó $BS - CP$; esto es, la diferencia de los senos de estos mismos arcos.

Pero por razon de las paralelas BD, HL tenemos (466) $DE : BE :: LG : GH$; luego sen AB + sen AC : sen AB — sen AC : : tang $\frac{AB + AC}{2}$: tang $\frac{AB - AC}{2}$.

658 Los tres principios sentados (642, 653 y 655) bastan para hacerse cargo del método que se podria seguir para formar una tabla de los senos. Con efecto,

to, ya hemos declarado (642) lo que se debe practicar para hallar el seno de 30°; y en virtud de lo dicho (653) se puede hallar el seno de 15°, y succesivamente los senos de 7° 30′, 3° 45′, 1° 52′ 30″, 0° 56′ 15″, 0° 28′ 7″ 30‴, 0° 14′ 3″ 45‴, 0 7′ 1″ 52‴ 30^{IV}. Fig.

Sentado esto, conviene reparar que quando son los arcos muy pequeños, no discrepan sensiblemente de sus senos, y son por consiguiente proporcionales á dichos senos. Así para hallar el seno de 1′, se hará esta proporcion: el arco de 0° 7′ 1″ 52‴ 30^{IV} es al arco de 0° 1′, como el seno del primer arco es al seno de 1′.

Si en este cálculo se supone el radio de solas 100000 partes, se deberán calcular los senos de los arcos que hemos referido, con tres decimales, para poder inferir los siguientes con diferencia de menos de una unidad: despues se sacarán los mayores por el método siguiente.

Desde 1′ hasta 3° 0′ bastará multiplicar succesivamente el seno de 1′ por 2, 3, 4, 5 &c. para hallar el seno de 2′, 3′ &c. hasta 3°, con diferencia de menos de una unidad.

Para calcular los senos de los arcos mayores que 3° 0′, se hará uso de lo que digimos (655); pero se escusará muchísimo trabajo calculando estos senos por este principio solo de grado en grado. Por lo que mira á los senos de los arcos que tuviesen grados y minutos, se hallarán con tomar la diferencia de los senos de dos grados conse-

Fig. secutivos, y formar esta proporcion: 60 minutos son al número de minutos de que se trata, como la diferencia de los senos de dos grados inmediatos es á un quarto término, que espresará lo que se le deberá añadir al menor de los dos senos para hallar el seno del número de grados y minutos propuesto.

Por egemplo, si despues de haber hallado que los senos de 8° y de 9° son 13917 y 15643, quisiera formar el seno de 8° 17′; tomaria la diferencia 1726 de dichos dos senos, y calcularia el quarto término de una proporcion, de la qual los tres primeros son 60′: 17′:: 1726:

Este quarto término, que es 489 con muy poca diferencia, añadido á 13917, dá 14406 para el seno de 8° 17′, qual se halla en las tablas, con diferencia de menos de una unidad.

La razon de este método se funda en que quando el
187. arco *KL* es pequeño como de 1°, por egemplo, las lineas *LM*, *Iu*, que son las diferencias entre los senos *LF*, *IH*, y el seno *KE*, son, con poca diferencia, proporcionales á los arcos *KL*, *IK*, que son las diferencias entre los arcos *AL*, *AI*, y el arco *AK*; porque pudiendose considerar como rectilineos los triángulos *KML*, *KuI*, serán semejantes, y podremos decir *KL*, diferencia entre los arcos *AL* y *AK*, es á *KI*, diferencia entre los arcos *AI* y *AK*, como *LM*, diferencia entre el seno del arco *AL* y del arco *AK*, es á *Iu*, diferencia entre el seno del arco *AI* y del arco *AK*;

Digitized by Google

AK; esto es, $KL : KI :: LM : Iu$, ó en el caso propues- Fig.
to $60' : 17' :: 1726 : 489$.

659 Pero acerca de este método hay que hacer una prevencion muy importante, de la qual resulta que no puede ser general su aplicacion; porque ya no se puede usar en llegando el arco AB á valer 87, y sirve tan- 188.
to menos qnanto mas se acerca este arco al valor de 90°. Porque quando consideramos como rectilineo el triángulo BED, consideramos como confundida con su arco BD la cuerda BuD; y mirando entónces iu como la verdadera diferencia entre los senos PB y Qx, omitimos la porcion ux del seno Qr. Quanto mas el arco AB se acerca á valer 90°, tanto mas los senos PB y Qx se acercan á la razon de igualdad con el seno total (644), y están muy cerca de ser iguales entre sí; en cuyo caso será muy corta la diferencia Ju entre los senos BP y Qx; y quanto menor fuere esta diferencia, mas considerable será respecto de ella la porcion ux omitida, y se deberá por lo mismo contar con ella para sacar con toda la exactitud que cabe el valor que se busca del seno Qx. En este caso es preciso tener presente que (523) las lineas DE, Dt, que son las diferencias entre el radio y los senos PB, Qr, son proporcionales á los quadrados de las cuerdas DB y Dx, ó (por ser muy pequeños los arcos DB y Dx) á los quadrados de los arcos DB y Dx; por lo que habiendo calculado el seno de 87°, se tomará la diferencia que hubiere entre él y el radio 100000; y para hallar el se-

no

Digitized by Google

Fig. 188. no de otro arco qualquiera entre 87° y 90°, se hará esta proporcion: El quadrado de 3° ó de $180'$ es al quadrado del número de minutos del complemento del arco propuesto, como la diferencia entre el radio y el seno de 87° es á un quarto término, que será Dt, el qual restándole del radio, dará Ct ó Qx, ó el valor del seno que se busca. Por egemplo, sabiendo que el seno de 87° es 99863, si quiero hallar el seno de $88^\circ\ 24'$, cuyo complemento es $1^\circ\ 36'$ ó $96'$, haré esta proporcion $(180')^2 : (96')^2 :: 137 : Dt$, de lo qual infiero que Dt vale 39 con muy poca diferencia: restando 39 del radio 100000, sale 99961, que es el seno de $88^\circ\ 24'$, qual se halla, con efecto, en las tablas.

660 Calculados por este método los senos, se sacarán facilmente las tangentes y las secantes en virtud de lo dicho (649).

661 Despues que se han calculado los senos se calculan sus logaritmos del mismo modo que se calculan los de los números. Es de observar, no obstante, que si se tomase en las tablas el valor numérico de uno de los senos á fin de calcular su logaritmo, en virtud de lo dicho (241), no se sacaría este logaritmo de todo punto el mismo que está en la columna de los logaritmos de los senos: la razon es, que los senos de las tablas se han calculado primitivamente en el supuesto de ser el radio de 10000000000 partes; pero como en los cálculos que ocurren comunmente no se necesita tanta exactitud, se han suprimido en la tablas actuales los cinco últimos guaris-

Digitized by Google

rismos de los valores numéricos de los senos tangentes &c. Fig.

De suerte que estos valores, quales estan actualmente en las tablas, no estan aproximados sino con diferencia de una unidad sobre 100000. No se ha hecho lo propio con los logaritmos de los senos, tangentes &c. se han quedado quales se habian calculado en el supuesto de estar el radio dividido en 10000000000 partes; y esta es la razon por que tienen una característica mucho mayor de lo que parece requeria el valor numérico del seno ó de la tangente correspondiente: de suerte que quando se hace uso de los logaritmos de los senos, tangentes &c. se calcúla en el supuesto tácito de ser el radio 10000000000 partes; y quando se hace uso de los valores numéricos de los senos, tangentes &c. se calcúla en el supuesto de no ser el radio mas que de 100000 partes.

Por lo que mira á los logaritmos de las tangentes y secantes, se sacan por medio de una simple adicion, y una sustraccion, una vez que se conocen los de los senos. Esto es evidente en vista de lo dicho (649 y 240).

662 Aunque en las tablas que publicarémos no se hallan los senos sino de los grados y minutos, pueden no obstante servir tambien para hallar los senos de los grados, minutos y segundos, practicando al pie de la letra lo que acabamos de declarar respecto de los grados y minutos; pero como se hace mas uso de los logaritmos de los senos que de los senos mismos, pararémos un poco la consideracion en este punto.

Quan-

Digitized by Google

Fig. Quando se quisiere hallar el logaritmo del seno de un número determinado de grados, minutos y segundos, se tomará en las tablas el logaritmo del seno del número de los grados y minutos: se tomará tambien la diferencia de los dos logaritmos inmediatos, que está puesta al lado, y se hará esta proporcion: $60''$ son al número de segundos propuesto, como la diferencia de los logaritmos tomada en las tablas, es á un quarto término que se añadirá al logaritmo del seno de los grados y minutos.

Si al contrario tuviéramos un logaritmo de seno que no correspondiera á un número cabal de grados y minutos, para hallar los segundos se haria esta proporcion: la diferencia de los dos logaritmos entre que está el logaritmo dado, es á la diferencia que hay entre el mismo logaritmo y el menor de los dos logaritmos de las tablas, entre los quales está, como $60''$ son á un quarto término que espresará el número de segundos que se le deberán añadir al arco correspondiente al logaritmo de las tablas inmediatamente menor que el propuesto. Si quisiera averiguar de quántos grados, minutos y segundos es el arco correspondiente al logaritmo 9203271 de un seno, buscaría primero entre qué logaritmos está en las tablas de los senos; y viendo que está entre el logaritmo del seno de $9^\circ\ 11'$ y el logaritmo del seno de $9^\circ\ 12'$, de cuyos logaritmos la diferencia es 7807, siendo 2604 la que hay entre el logaritmo propuesto y el logaritmo de $9^\circ\ 11'$, serán, pues, 7807, 2604, y $60''$ los tres primeros términ-

minos de la proporcion que me toca formar; y como será Fig.
20 el quarto término, será señal que el logaritmo propuesto corresponde al seno de un arco de $9^\circ\ 11'\ 20''$.

Pero no se podrá practicar esta regla si no llegáre el arco á 3°, y se hará lo que en el egemplo siguiente. Si se pidiese el seno de $1^\circ\ 55'\ 48''$, se haria esta proporcion: $1^\circ\ 55' : 1^\circ\ 55'\ 48'' ::$ el seno $1^\circ\ 55'$ es á un quarto término que (por ser los arcos pequeños proporcionales á sus senos) será sin diferencia reparable el seno de $1^\circ\ 55'\ 48''$. Pero se haria con menos trabajo el cálculo, reduciendo los dos primeros términos á segundos, y tomando en las tablas el logaritmo del seno de $1^\circ\ 55'$, que es el tercer término: se le añadirá el logaritmo del número que espresáre quántos segundos hay en $1^\circ\ 55'\ 48''$, y restando de la suma el logaritmo del número que espresáre quántos segundos hay en $1^\circ\ 55'$, sería la resta (240) el logaritmo del quarto término, esto es, el que se busca.

Recíprocamente, *para hallar el número de grados, minutos y segundos de un arco que no llegue á 3°, y cuyo seno es conocido*, se buscaría desde luego en las tablas quál es el número de grados y minutos: despues se haria esta proporcion: el seno del número de grados y minutos hallados es al seno propuesto, como el mismo número de grados y minutos, reducidos á segundos, es al número total de segundos del arco que se busca: y haciendo la operacion por logaritmos, se reducirá á tomar la diferencia entre el logaritmo del seno propuesto: y el logarit-

Fig. ritmo del seno del número de grados y minutos inmediatamente menor, y añadir dicho logaritmo al logaritmo del espresado número de grados y minutos transformados en segundos: será la suma el logaritmo del número de segundos que vale el arco que se busca. Por egemplo, si me proponen como logaritmo del seno de un arco el número 8,6233427: hallo en las tablas que el número de grados y minutos que mas se le acerca, es 2° 24′, y que la diferencia entre el logaritmo del seno propuesto y el logaritmo del seno del último arco, es 0013811: sumo esta diferencia con 3936 5137 logaritmo de 2° 24′ transformados en segundos: la suma 3,9378948 corresponde en las tablas de logaritmos á 8667, que espresa el número de segundos del arco que se busca, y que por consiguiente vale 2° 24′ 27″. Esta regla es la inversa de la antecedente.

Por lo que mira á los logaritmos de las tangentes, se practicarán las mismas reglas mudando el nombre de seno en el de tangente: no hay mas excepcion sino respecto de los arcos que están entre 87° y 90°. Se practicará lo siguiente: Calcúlese el logaritmo de la tangente del complemento por la regla que acabamos de dar para las tangentes, y réstese este logaritmo del duplo del logaritmo del radio. Con efecto, segun lo dicho (651), la tangente es el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son, la cotangente, el radio y el radio; y si al contrario se tuviese el logaritmo de la tangente de un arco, que hallándose entre 87° y 90°, hubiera de tener segun-

dos

dos, se restaría dicho logaritmo del duplo del logaritmo del Fig.
radio, y saldría la tangente del complemento, que por hallarse precisamente entre 0° y 3°, se determinaría facilmente en virtud de lo que precede; y tomando el complemento del arco hallado por este medio, se hallaría el arco que se busca.

De la resolucion de los Triángulos Rectángulos.

663 Digimos arriba (638) que para poder resolver un triángulo, era indispensable conocer tres de las seis cosas de que consta; y que entre las tres cosas conocidas había de haber por lo menos un lado. Como el ángulo recto es conocido, basta conocer en los triángulos rectángulos dos cosas distintas del ángulo recto; pero es preciso que de estas dos sea á lo menos la una un lado. Conviene tambien tener presente que como los dos ángulos de un triángulo rectángulo valen juntos un ángulo recto, una vez que se conoce el uno, es tambien conocido el otro.

Redúcese á quatro casos la resolucion de los triángulos rectángulos; ó las dos cosas conocidas son 1° el uno de los dos ángulos agudos, y un lado del ángulo recto; ó 2° son un ángulo agudo y la hypotenusa; ó 3° un lado del ángulo recto y la hypotenusa: ó 4° finalmente los dos lados del ángulo recto. Estos quatro casos se resolverán siempre en virtud de una de las dos proporciones ó analogías siguientes.

664 1° *El radio de las tablas es al seno del uno de*

Fig. *los ángulos agudos, como la hypotenusa es al lado opuesto á dicho ángulo agudo.*

665 2.° *El radio de las tablas es á la tangente del uno de los ángulos agudos, como el lado del ángulo recto adyacente á dicho ángulo es al lado opuesto al mismo ángulo.*

Para demostrar la primera de estas dos analogías bas-
183. tá suponer que en el triángulo rectángulo CDE la parte AC de la hypotenusa es el radio de las tablas: entónces imaginando el arco AB, la perpendicular AP será el seno del ángulo ACB ó DCE; pero por causa de las paralelas AP y DE tendrémos en los triángulos semejantes CAP, CDE, $CA : AP :: CD : DE$; esto es, R : sen $DCE ::$ $CD : DE$, que es cabalmente la primera analogía.

Del mismo modo se probará que R : sen $CDE :: CD$: CE.

Por lo que toca á la segunda analogía conviene figu-
189. rarse en el triángulo rectángulo CEF que la parte CA del lado CE sea el radio de las tablas: imaginando el arco AB, la perpendicular AD levantada sobre AC en el punto A, será la tangente del ángulo C ó FCE; entonces en virtud de los triángulos semejantes CAD, CEF, tendrémos CA: $AD :: CE : CF$; esto es, R : tang $FCE :: CE : EF$, que es la segunda de las dos analogías propuestas.

Del mismo modo se probará que R : tang $CFE ::$ $EF : CE$.

Las dos analogías que acabamos de probar, son lo mismo que las dos proposiciones siguientes.

Si

Digitized by Google

666 1.° *Si en un triángulo rectángulo se toma la hypotenusa por radio, será cada lado el seno del ángulo opuesto.* Si en el triángulo rectángulo *CED* se toma por radio ó seno total la hypotenusa *CD*, y por centro el punto *C*, será *DE* el seno del arco *DB*, ó del ángulo *DCE*. Si tomásemos por centro el punto *D*, se haría patente con igual facilidad que sería *CE* el seno del ángulo *CDE*. Fig. 190.

667 2.° *Si se toma por radio el uno de los dos lados que forman el ángulo recto, será el otro la tangente del ángulo opuesto.* Si en el triángulo *CAD* se toma por radio el lado *CA*, y por centro el punto *C*, se echa de vér que será *AD* la tangente del ángulo opuesto *C*. Si se tomára por centro el punto *D* y por radio *DA*, sería *CA* la tangente del ángulo opuesto *D*. 189.

668 En las aplicaciones que nos proponemos hacer de estas dos analogías para la resolucion de todos los casos de los triángulos rectángulos, nos valdrémos siempre de los logaritmos de los senos, tangentes &c, en lugar de los senos, tangentes &c; y para que se acostumbren los principiantes á hacer uso del complemento arismético, le usarémos en todos los cálculos, exceptuando los casos en que el logaritmo que se hubiere de restar fuese el del radio; porque siendo 10 su característica, es muy facil la sustraccion.

669 CASO I. *Supongamos que en el triángulo rectángulo* ABC *conozcamos el ángulo* A *y el lado* AB, *y queramos conocer el otro lado* BC: que sea el lado *AB* de 191.

Fig. 132 P. y el ángulo *A* de 48° 64′. Se echa de ver que las tres cosas conocidas y la quarta que se busca son los términos de la analogía del número 665: luego para hallar *BC* harémos esta proporcion R : tang CAB :: BA : BC, ó R : tang 48° 54′ :: 132 P : BC: de suerte que tomando en las tablas el valor de la tangente de 48° 54′ multiplicándola por 132, y dividiendo el producto por el valor del radio tomado en las tablas, saldrá el número de pies de *BC*.

Pero se puede abreviar muchísimo el cálculo, valiéndose, en lugar de los espresados números de sus logaritmos; porque con esto se reduce la operacion á sumar (240) los logaritmos del segundo y tercer término, y restar de la suma el logaritmo del primero; por lo que se hará el cálculo como se sigue.

Log. tang 48° 54′.......	10,0593064
Log. 132...............	2,1205739
Suma..................	12,1798803
Log. del radio..........	10,0000000
Resta ó log. *BC*.........	2,1798803

que en las tablas corresponde á 151, 32 con diferencia de menos de una centésima. Así *BC* es de 151 P, 32, ó 151 P 3 p 10 l (128).

Prevengo de paso, que por ser 10 la característica del logaritmo del radio, y ceros todos sus demas caracteres,

Digitized by Google

res, se podrá, quando se trata de añadirle ó restarle, escusar escribirle, y bastará añadir ó quitar una unidad á las decenas de la característica del logaritmo, con el qual se le hubiese de sumar, ó del qual se le hubiese de restar. Fig.

CASO II. *Conociendo la hypotenusa y uno de los ángulos agudos, hallar el valor de los lados.*

Supongamos que en el triángulo rectángulo *ACB*, sea 192.
la hypotenusa *AB* de 32 P. y el ángulo *A* de 22° 30′, y que en virtud de estos datos queramos saber el valor del lado *BC* y del lado *CA*.

Para hallar el lado *BC* harémos esta analogía (664) *R*: sen 22° 30′ :: 32 P : *BC*.

Y para hallar *AC* se tendrá presente que el ángulo *B* es complemento del ángulo *A*, por lo que se hará esta analogía (664) *R*: sen 67° 30′ :: 32 P : *AC*.

Ambas operaciones se harán por logaritmos del modo siguiente.

Log. sen 22° 30′	9,5828397
Log. 32	1,5051500
Suma	11,0879897
Log. del radio	10 . . .
Resta ó log. *BC*	1,0879897

Que corresponde á 12,25, con diferencia de menos de una centésima.

Fig.

Log. sen 67° 30′.......	9,9656153
Log. 32	1,5051500
Suma.................	11,4707653
Log. del radio	10 . . .
Resta ó log. *AC*	1,4707653

que corresponde á 29, 56 con diferencia de menos de una centésima.

CASO III. *Conociendo un lado y la hypotenusa hallar*
192. *los ángulos.*

Supongamos que en el triángulo rectángulo *ACB* conozcamos el lado *AC* del ángulo recto: que sea la hypotenusa de 42 P, y el lado *AC* de 35 P, y queramos conocer el ángulo *CAB*. Ya que los dos ángulos *A* y *B* valen juntos un ángulo recto, conocerémos el ángulo *A*, si podemos determinar el ángulo *B*. Para determinar éste, nos basta hacer (664) esta analogía: *R* : sen *B* :: *AB* : *AC*, ó *R* : sen *B* :: 42 : 35; ó escribiendo la segunda razon en lugar de la primera 42 : 35 :: *R* : sen *B*.

Haciendo la operacion por logaritmos, saldrá

Log. 35....................	1,5440680
Log. del radio	10. .
Comp. aris. del log. de 42..	8,3767507
Suma ó log. sen *B*	19,9208187

que en las tablas corresponde á 56° 27′: luego el ángulo *A* es de 33° 33′.

CA-

CASO IV. *Dados en el triángulo rectángulo* ACB *los dos lados del ángulo recto, hallar los ángulos y la hypotenusa.* Fig.

Para hallar el ángulo A se hará esta analogía (665) 192.
$AC : BC :: R : \text{tang}\, A$; esto es (suponiendo que AC sea de 35 P y BC de 15), $35 : 15 :: R : \text{tang}\, A$.

Haciendo la operacion por logaritmos,

Log. 15	1,1760913
Log. del radio	10 . . .
Compl. aris. log. de 35	8,4559320
Suma ó log. tang *A*.	19,6320233

que en las tablas corresponde á $23^\circ\ 12'$.

Para hallar AB se puede, despues de determinado el ángulo A, practicar lo propio que en el caso 3°. Pero no es necesario calcular el ángulo A: la proposicion demostrada (517) basta. Así tomando el quadrado de 15, que es 225, y el quadrado de 35 que es 1225, la suma de estos dos quadrados, que es 1450, será el quadrado de AB: y sacando la raiz quadrada, saldrá 38, 08 que con diferencia de menos de una centésima será el valor de AB.

Por la misma razon, si conociendo la hypotenusa AB, y el uno de los lados del ángulo recto, se pidiese el otro lado BC, no sería menester calcular el ángulo A: se restaría (518) el quadrado del lado conocido AC del quadrado de la hypotenusa AB: la raiz quadrada de la resta sería el valor del lado BC.

Digitized by Google

Fig.

Resolucion de los Triángulos Obliquángulos.

670 Llamamos *triángulos obliquángulos*, en general, los que no tienen ningun ángulo recto.

671 *En qualquiera triángulo rectilineo los senos de los ángulos son entre sí como los lados opuestos á dichos ángulos.*

Porque si inscribimos un triángulo en un círculo, cada lado será la cuerda de un arco duplo del que mide el ángulo opuesto (372): luego la mitad de cada lado es (641) el seno del ángulo opuesto: luego ya que las mitades tienen entre sí unas con otras la misma razon que los todos son entre sí los lados como los senos de los ángulos opuestos.

672 Sirve esta proposicion para resolver un triángulo: 1.° *Quando son conocidos dos ángulos y un lado.* 2.° *Quando son conocidos dos lados y un ángulo opuesto á uno de dichos lados.*

193. I. CASO. Si conociéramos el ángulo B, el ángulo C, y el lado BC, se hallaría el ángulo A, sumando uno con otro los dos ángulos B y C, y restando su suma de $180°$; y para hallar los dos lados AC y AB se harian las dos proporciones siguientes:

$$\text{sen } A : BC :: \text{sen } B : AC$$

$$\text{sen } A : BC :: \text{sen } C : AB.$$

Supongamos v. g. que sea el ángulo B de $78° \; 57'$, el ángulo C de $47° \; 34'$, y el lado BC de 184 P, será el án-

ángulo *A* de $53^\circ\ 29'$, y se hallarán los otros dos lados Fig.
por medio de estas dos proporciones:

$$\text{sen } 53^\circ\ 29' : 184 :: \text{sen } 78^\circ\ 57' : AC$$
$$\text{sen } 53^\circ\ 29' : 184 :: \text{sen } 47^\circ\ 34' : AB$$

Haciendo estas operaciones por logaritmos como sigue.

Log. 184.................. 2,2648178
Log. sen $78^\circ\ 57'$.......... 9,9918727
Compl. arism. log. sen $53^\circ\ 29'$. 0,0949148
Suma ó log. *AC*.......... 2,3516053

Log. 184.................. 2,2648178
Log. sen $47^\circ\ 34'$.......... 9,8680934
Compl. aris. log. sen $53^\circ\ 29'$.. 0,0949148
Suma ó log. *AB*.......... 2,2278260

se hallará que *AC* es de 224 P, 7, y *AB* de 169 P.

CASO II. Si se conoce el lado *AB*, el lado *BC* y el 180.
ángulo *C*, se determinará el ángulo *A* calculando su seno por esta proporcion:

$$BA : \text{sen } C :: BC : \text{sen } A.$$

Pero es de reparar, segun digimos arriba (638), que el ángulo *A* no será determinado sino en quanto se supiere si ha de ser agudo ú obtuso.

Pongo por caso que sea *AB* de 37 P, *BC* de 68 P, y el ángulo *C* de $32^\circ\ 28'$, la proporcion será

$$37 : \text{sen } 32^\circ\ 28' :: 68 : \text{sen } A.$$

Se hallará practicando lo que arriba, que este seno corres-

pon-

Fig. ponde en las tablas á 80° 36′; pero como el seno de un ángulo es el mismo que el de su suplemento, no sabemos si se ha de tomar 80° 36′, ó su suplemento 99° 24′; pero en sabiendo que el ángulo que se busca ha de ser agudo, se sabe entónces de fijo que en el caso actual ha de ser de 80° 36′, y el triángulo tiene entónces la figura *ABC.* Si al contrario hubiese de ser obtuso, será de 99° 24°, y tendrá el triángulo la figura *CBD.*

673 Para inteligencia de lo que vamos á declarar acerca de los triángulos obliquángulos rectilineos conviene saber que *la mayor de dos cantidades cuya suma es conocida, igualmente que su diferencia, es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia; y la menor es igual á la resta que sale restando la mitad de la diferencia de la mitad de la suma.*

Si me consta, por egemplo, que la suma de dos cantidades es 57, y que la diferencia es 17, inferiré que las dos cantidades son 37 y 20; añadiendo por un lado la mitad de 17 á la mitad de 57, y restando por otro lado la mitad de 17 de la mitad de 57.

Con efecto, una vez que la suma contiene la mayor y la menor de las dos cantidades, si á dicha suma se la agregára la diferencia, se transformaría en el duplo de la cantidad mayor: luego la mayor de las dos cantidades vale la mitad de este total, esto es, la mitad de la suma de las dos cantidades, mas la mitad de su diferencia.

Si al contrario se restáse de dicho total la diferencia, que-

Digitized by Google

quedaría el duplo de la cantidad menor, que por consiguiente valdria la mitad de la resta; esto es, la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia. Fig.

674 En qualquiera triángulo rectilineo *ABC* si desde el uno de los ángulos se baja una perpendicular al lado opuesto, se verificará siempre esta proporcion: 194. 195.

El lado AC *sobre el qual ó sobre cuya prolongacion cae la perpendicular, es á la suma* AB + BC *de los otros dos lados, como la diferencia* AB — BC *de dichos dos lados es á la diferencia de los segmentos* AD *y* DC, *ó á su suma, segun que la perpendicular cae dentro ó fuera del triángulo.*

Desde el punto *B* como centro, y con un radio igual al lado *BC*, descríbase la circunferencia *CEGF*, y prolónguese el lado *AB* hasta que la encuentre en *E*. Entónces *AE* y *AC* son dos secantes tiradas desde un mismo punto fuera del círculo: luego en virtud de lo dicho (476), tendrémos *AC* : *AE* : : *AG* : *AF*.

Pero *AE* es igual á *BA* + *BE*, ó *AB* + *BC*: *AG* es igual á *AB* — *BG*, ó *AB* — *BC*; y *AF* es igual á *AD* — *DF*, ó (349) á *AD* — *DC*: luego *AC* : *AB* + *BC* : : *AB* — *BC* : *AD* — *DC*. En la fig. 195 *AF* es igual á *AD* + *DF*, ó *AD* + *DC*. Tenemos, pues, en este caso *AC* : *AB* + *BC* : : *AB* — *BC* : *AD* + *DC*. 194.

Luego si fueren conocidos los tres lados de un triángulo, se podrá sacar en virtud de esta proposicion el valor de los segmentos formados por la perpendicular tirada des-

de

Digitized by Google

Fig. de uno de los ángulos al lado opuesto; porque entónces
194. se conoce la suma AC de dichos segmentos, y la proporcion que acabamos de demostrar manifiesta su diferencia; porque en este caso los tres primeros términos de esta proporcion son conocidos; se conocerá, pues, cada uno de dichos segmentos en virtud de lo dicho (673). En la figura 195 es conocida la diferencia de los segmentos AD y DC, que es el lado mismo AC, y la proporcion determina el valor de su suma.

675 Sentado esto, es facil resolver esta cuestion: *conociendo los tres lados de un triángulo, determinar los ángulos.*

194. Se imaginará una perpendicular tirada desde uno de dichos ángulos, de lo que resultarán dos triángulos rectángulos ADB, CDB.

Por la proposicion antecedente se calculará uno de los segmentos, por egemplo, CD, y entónces en el triángulo rectángulo CDB conocerémos dos lados CD y BC ademas del ángulo recto, y sacarémos facilmente el ángulo C, en virtud de lo dicho (664).

Egemplo. El lado AB es de 142 P, el lado BC de 64, y el lado AC de 184: se pide el ángulo C.

Calcúlo la diferencia de los dos segmentos por esta proporcion: $184 : 142 + 64 :: 142 - 64 : AD - DC$, ó $184 : 206 :: 78 : AD - DC$, que vale 87, 32: luego (673) el segmento menor CD vale la mitad de 184 menos la mitad de 87, 32, quiero decir que vale 48, 34.

Es-

Esto supuesto, en el triángulo rectángulo *CDB* busco el ángulo *CBD*, el qual una vez conocido, dará á conocer el ángulo *C*; y para hallar dicho ángulo *CBD*, hago esta proporcion (664), *BC* : *CD* : : *R* : sen *CBD*; esto es, 64 : 48, 34 : : *R* : sen *CBD*. Fig.

Por logaritmos

log. 48, 34	1,6843066
log. del radio	10 . . .
compl. aris. log. 64	8,1938200
suma ó log. sen *CBD*. .	19,8781266

que en las tablas corresponde á 49° 3′: luego el ángulo *C* es de 40° 57′.

El caso en que se trata de resolver un triángulo, cuyos tres lados son conocidos, puede ocurrir á menudo, quando se han de calcular muchos triángulos dependientes los unos de los otros.

676. *En qualquiera triángulo rectilineo la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los dos ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

Porque en virtud de lo dicho (671) tenemos *AB*: sen *C* : : *AC* : sen *B* : luego (192) *AB* + *AC* : *AB* — 196.
AC : : sen *C* + sen *B* : sen *C* — sen *B*; pero (657) sen *C* + sen *B* : sen *C* — sen *B* : : tang $\frac{C+B}{2}$: tang $\frac{C-B}{2}$: luego *AB* + *AC* : *AB* — *AC* : : tang $\frac{C+B}{2}$: tang $\frac{C-B}{2}$.

677 Sirve esta proposicion para resolver un trián-

gu-

Digitized by Google

gulo quando se conocen dos lados, y el ángulo que comprehenden. Porque si conocemos el ángulo *A*, por egemplo, tambien se conocerá la suma de los dos ángulos *B* y *C*, con restar el ángulo *A* de $180°$. Luego tomando la mitad de la resta que de esta sustraccion resultáre, y buscando su tangente en las tablas, tendrémos con los dos lados *AB* y *AC*, supuestos conocidos, tres términos conocidos en la proporcion que acabamos de demostrar. Se podrá, pues, calcular el quarto término, que manifestará la mitad de la diferencia de los dos ángulos *B* y *C*. Entonces, conociendo la semisuma y la semidiferencia de estos ángulos, se hallará el mayor (673), añadiendo la semidiferencia á la semisuma, y el menor restando la semidiferencia de la semisuma. Finalmente conociendo estos dos ángulos, se hallará facilmente el tercer lado por medio de la proporcion demostrada (671).

Egemplo. Supongamos que sea de 142 P el lado *AC*, y *AB* de 120, y el ángulo *A* de $48°$; se piden los dos ángulos *C* y *B*, y el lado *BC*.

Resto $48°$ de $180°$, y restan $132°$ para la suma de los dos ángulos *C* y *B*, y por consiguiente su semisuma es $66°$.

Hago esta proporcion: $142 + 120 : 142 - 120 :: \text{tang } 66° : \text{tang } \frac{C - B}{2}$, ó $262 : 22 :: \text{tang } 66° : \text{tang } \frac{C - B}{2}$.

Usan-

Usando de los logaritmos

Log. tang 66°.......	10,3514169
log. 22.............	1,3424227
compl. aris. log. 262..	7,5816987
suma ó log. tang semidif.	9,2755383

que en las tablas corresponde á $10^\circ\ 41'$.

Añadiendo esta semidiferencia á la semisuma 66°, y restándola despues de esta misma semisuma, tendré lo que aqui sale

	66°	$0'$		66°	$0'$
	10	41		10	41
Angº *C.*	76°	$41'$	Angº B.	55°	$19'$

Finalmente para hallar el lado *BC*, hago esta proporcion: sen *C* : *AB* : : sen *A* : *BC*; esto es, sen $76^\circ\ 41'$: 120 P : : sen 48° : *BC*.

Practicando lo que en los egemplos propuestos, se hallará que *BC* vale 92 P, 7.

Digitized by Google

Fig.

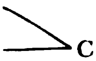
GEOMETRÍA PRÁCTICA.

De las Medidas.

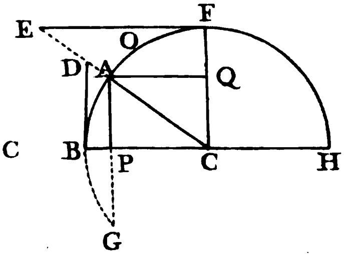
678 AUnque hemos declarado en los Elementos de Geometría quanto pertenece á la medida de la estension, nos toca ahora volver al asunto, no con la mira de gastar el tiempo en repeticiones inútiles, sino para contraer á casos prácticos lo que alli digimos esplicando de un modo abstracto las principales operaciones que pueden ofrecerse. Muy pocas dificultades encontraria en esta aplicacion el que tubiese presentes los principios especulativos en que se funda, si fuese posible saliesen tan exactas las operaciones que penden del egercicio de nuestros sentidos groseros, como las especulaciones geométricas en que se egercita nuestro entendimiento. Nos es forzoso en la práctica hacer uso de instrumentos que pocas veces y quasi nunca dan resultados tan rigurosos como los que saca la teórica; y á estos inconvenientes que dimanan de la naturaleza de las cosas, se agrega otro, que bien que solo pende del capricho de los hombres, no deja de ser de muchísima consideracion.

679 Consiste este inconveniente en la gran variedad de medidas que usan no solo las diferentes Naciones, sino tambien los varios Pueblos de una misma Nacion: siendo tan perjudicial al comercio esta multiplicidad de medidas, como contraria

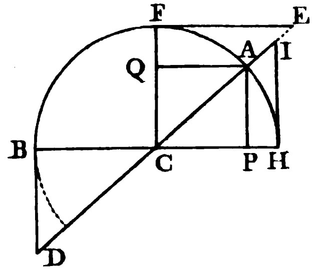
á



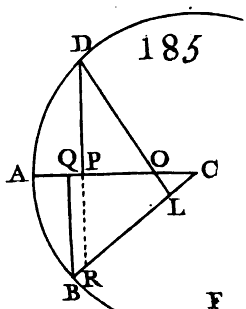
181



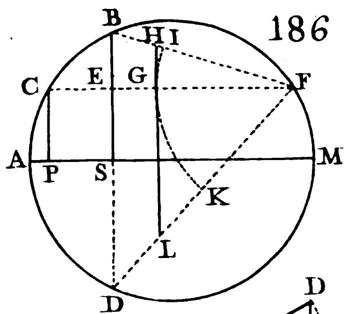
182



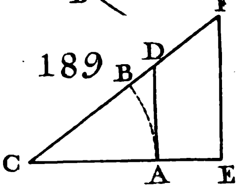
185



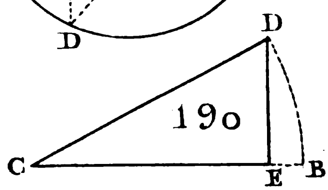
186



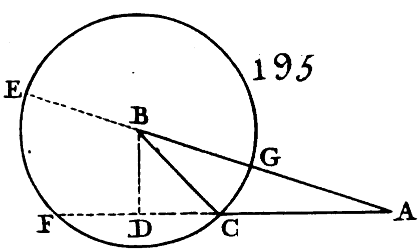
189



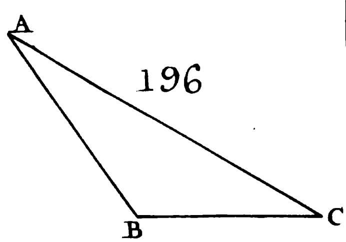
190



195



196



A

Digitized by Google

á la exâctitud matemática. Para quitar este inconveniente seria Fig. muy del caso una medida invariable que por razon de esta circunstancia mereciera hacerse universal, cuya medida han buscado con mucho empeño varios matemáticos. Escusarémos por ahora dar noticia de las investigaciones en que se han empeñado con esta mira, por fundarse todas ellas en principios que no hemos tenido todavia lugar de declarar; pero entretanto manifestarémos algunas de las razones que hacen patente la necesidad de reducir á sola una todas las medidas conocidas, y la posibilidad de conseguirlo.

680 Si comerciar es trocar lo superfluo por lo necesario, todos los medios que mas facilitaren este cambio serán mas ventajosos para el comercio. En los trueques hemos de atender á ciertas razones, y particularmente á la razon que hay entre las cantidades, cuya razon se averigua, con las medidas que á este fin se han inventado: quanto mas facil fuere conocerla, tanto menos embarazoso será el trueque, y por consiguiente tanto mas prontas, frecuentes y provechosas serán las operaciones del comercio. Para averiguar la razon de las cantidades que se han de cambiar, no hay medio mas sencillo y seguro que una medida fija y universal.

681 En vano se nos opondrá para eludir la fuerza de este argumento, que reducidas á la uniformidad todas las medidas, perderian muchos Mercaderes la ganancia que se les sigue de la poca conformidad que entre ellas se repara.

1.° Porque es imaginaria esta ganancia, ora se haga el trato entre dos Mercaderes, ora se haga entre un Mer-

Fig. cader y un particular. En el primer caso, como es para los que egercitan el trato un punto capital la reduccion de las medidas, y les mueve con igual estímulo el deseo de ganar, no hemos de presumir ignore ninguno de los dos lo que tanta cuenta le tiene saber, y serán ambos por lo menos igualmente diestros. Si se hiciere el trato entre un Mercader y un particular, este compra el género por el peso y la medida que conoce. Tan adelantado se halla como el Mercader, y en su mano está no concluir un ajuste en que haya de perder. No resulta, pues, en ninguno de estos dos casos beneficio alguno de la variedad de las medidas.

2.° Pero demos por supuesto, y puede suceder algunas veces, que alguno de los dos, el vendedor y el comprador, halle alguna ventaja en el trato, porque tenga un conocimiento mas puntual de las medidas; es constante que no podrá ser legítimo este beneficio. Para que gane en un ajuste el que está mejor enterado de la razon de las medidas, es preciso que pierda el que no está igualmente impuesto en su correspondencia. En este caso el primero vende menos ó compra mas géneros por el precio ajustado, de lo que entiende comprar ó vender el otro con quien trata; es, pues, doloso, y por consiguiente ilicito el trato. Finalmente no puede ganar en la medida el uno de los dos á no ser que haya mala fé, ó que padezca el otro en sus cálculos alguna equivocacion contraria á sus intereses.

Aun quando tuviéramos por lícita esta ganancia, y confesáramos que es para muchos un recurso, no podria

el

Digitized by Google

el interés de este corto número preponderar respecto de la Fig.
comodidad y ventaja que hallarian todos los demas habitantes de un Reyno en la igualdad de las medidas, que escusaria una infinidad de reducciones siempre penosas, y en cuyos cálculos es muy facil padecer muchas equivocaciones. Seria sin duda alguna muy provechoso para los cambistas el que hubiese distinta moneda en cada Ciudad y en cada calle; pero no por esto deja de ser mas ventajoso para el público que no haya sino una moneda en cada Reyno. Pensar lo contrario seria lo mismo que mirar como util á la sociedad la multiplicidad de lenguas, por la razon de que si hablasen una misma todos los hombres, no necesitaríamos de intérpretes.

682 No basta, dicen algunos, que sea ventajoso reducir todas las medidas á la uniformidad: nada adelantamos si no se allanan las dificultades que ha de encontrar esta reduccion. Nadie se persuadirá á que Oficiales, Labradores, Jornaleros se convengan en desechar la medida á que están hechos desde su niñez por otra que se substituya en su lugar. El que esperare hallar en ellos la docilidad en que deberia afianzarse el beneficio de esta providencia, ignoraria á buen seguro quán rendido y obstinado obedece el vulgo al imperio de la costumbre. Fuera de esto, la mayor parte de los derechos se pagan en frutos, y estos se miden con medida distinta en cada Provincia, y aun en cada Partido. Si se admitiese una medida general, seria preciso alterar todos los títulos antiguos, cuya operacion en-

Digitized by Google

Fig. contraria muchas oposiciones, y no seria la menor la de las partes interesadas.

Pero si está probado que es ventajoso usar de sola una medida, no deben usarse muchas sino en el caso de haber una imposibilidad real en la reduccion: si esta no es mas que dificil, se debe procurar vencer los obstáculos que la estorvan, y bastaría quizá para conseguirlo considerarlos con algun cuidado. No sé yo que sea mas dificil introducir en un Reyno una medida nueva, que dar curso á una nueva moneda, ó mudar el valor de la antigua; y esto se ha egecutado varias veces.

683 Convengo sin embargo en que podria seguirse algun inconveniente de abrogar por una ley absoluta todas las medidas antiguas, mandando se hiciese uso de sola la nueva, antes que se les hubiese hecho, por decirlo asi, familiar á los Pueblos. Pero esta ley rigurosa no seria necesaria; se podrian dejar subsistir en cada Provincia por un tiempo limitado las medidas antiguas, precisando á que todas las ventas, arrendamientos y todos los recibos en que hubiese de intervenir el ministerio público de los Escribanos ó de los Tribunales, se hiciesen con arreglo á la medida antigua y á la nueva. A este fin se deberian calcular é imprimir tablas de reduccion del mismo modo que hay aranceles para la reduccion de las monedas: y con el socorro de estas tablas, que en el principio podrian darse de valde, las reducciones que hoy se egecutan entre los Mercaderes de diferentes Naciones y Provincias, con imperfeccion y

por

Digitized by Google

por medío de una operacion las mas veces dificultosa, se Fig.
egecutarian en lo succesivo con igual facilidad que precision.

684 Podria tambien guardarse en las Casas de Ayuntamiento, en las Aduanas, y en poder de los diferentes Gremios de Mercaderes y Oficios un padron de las dos medidas, y de ambas se deberia hacer mencion en todos los testimonios, recibos é instrumentos públicos. Con esto se enterarian asi los particulares como los Mercaderes de la correspondencia entre la nueva medida y la antigua; y al cabo de cierto tiempo que la esperiencia determinaria, se podria mandar, si se tubiese por conveniente, que no se hiciera mas memoria de la antigua; cuyo uso se perdería insensiblemente, sin que se le siguiese el menor perjuicio al comercio. Multiplicando tambien los modelos de la nueva medida, y haciendo que fuesen mas comunes y baratos que los de las antiguas, se acostumbrarian poco á poco los particulares á servirse de ella con preferencia para sus usos privados, vendria á ser en poco tiempo la nueva medida mas familiar que la otra, y por todos estos medios juntos se conseguiria quizá, sin la intervencion de la autoridad Real, escluir de todo punto la medida antigua. Los vecinos de Ginebra han usado con tanta frecuencia de la vara de Francia, que sin providencia alguna han venido á abandonar insensiblemente la propia.

685 Pero una vez que no existe la medida universal, nos es preciso conocer las que están recibidas, las principales por lo menos, para la medida de la estension. Esto nos

Digitized by Google

Fig. empeña en dar noticia de algunas de ellas, y señalar en lo que cabe la correspondencia que hay entre las unas y las otras.

686 Un grano de cebada cogido del medio de la espiga, y muy seco, es en algunas Naciones * el fundamento y la raiz de todas las medidas. Tres ó quatro de estos granos puestos de punta á continuacion los unos de los otros componen la medida que se llama pulgada; y como no es constante la longitud de los granos de cebada, ni fijo el número que se necesita para una pulgada, es incierto el valor de esta medida, y por consiguiente el de todas las demas que de ellas se derivan como de su raiz.

687 No adelantaríamos mas con tomar el pie por medida fundamental: varía su longitud de un Pais á otro; y aun quando la quisiéramos determinar por la del pie humano, á imitacion de los antiguos **, tampoco saldria invariable esta medida, por la razon que qualquiera puede adivinar.

Para escusar mucha parte de la confusion que podria ocasionar su multiplicidad, han escogido los Matemáticos una medida á la qual suelen referir todas las demás. Esta medida, que hace en algun modo oficios de universal, es el pie de Rey de París, sexta parte de la medida que usan los Fran-

ce-

* Vease el principio del libro I del tom. II de la Obra siguiente: *R. P. Claudii Francisci Milliet Dechales Camberiensis è S. I. Cursus seu Mundus Mathematicus*; y el capít. 2. de la *Geographie Generale, composeé en Latin par Bernard Varenius, Revüe par Isaac Newton, &c. A Paris MDCCLV.*

** Vease la pag. 2. y sig. del *Traité des Mesures itineraires anciennes & modernes. Par M. D'Anville. A Paris MDCCLXIX.*

ceses con el nombre de *Toesa*, que es por consiguiente entre las medidas estrangeras la que mas nos importa conocer. Fig.

688 Se divide, pues, la toesa francesa en seis partes iguales que llaman *pies*: cada pie consta de doce partes iguales que llaman *pulgadas*: en la pulgada hay doce *lineas*, y la linea consta de doce *puntos*.

De donde sacarémos que en la toesa hay	6 pies.
	72 pulgadas.
	864 lineas.
	10368 puntos.

La señal de la toesa es	T
la del pie	P
la de la pulgada	p
la de la linea	l
la del punto	p.°

De modo que 3 toesas, 5 pies, 4 pulgadas, 6 lineas, se escriben de este modo: 3 T 5 P 4 p 6 l 8 p°.

689 La medida mas usada en Castilla es el pie ó tercia de la vara que llaman de Burgos, mandada observar en todo el Reyno por una Pragmática de Felipe II del año de 1568. Se compone esta vara de tres partes iguales que llamamos pies; cada pie tiene doce pulgadas; cada pulgada doce lineas, y cada linea doce puntos: de manera que

en la vara hay	3 pies.
	36 pulgadas.
	432 lineas.
	5184 puntos.

Digitized by Google

Fig. 690 Para reducir á pies castellanos ó tercias de la vara un número dado de pies franceses, es indispensable saber que segun tiene averiguado el Excelentísimo Señor D. Jorge Juan, 7 pies castellanos componen 6 pies de Rey franceses, y que por consiguiente el pie castellano es al pie frances :: 6 : 7, y cabrán en una estension determinada mas pies castellanos que franceses, en la misma razon que la primera medida es, al contrario, menor que la segunda: de suerte que si queremos saber quántos pies castellanos componen 34 pies franceses, se reduce la cuestion á calcular el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros serian 6 : 7 :: 34. Multiplicando, pues, los dos medios uno por otro, y partiendo el producto por el primer término, saldrá que en el número propuesto de pies franceses caben $39\frac{2}{3}$ pies castellanos.

Si quisiéramos reducir á varas un número determinado de toesas, pongo por caso 56979 toesas, se egecutaría la reduccion con suma facilidad, considerando que los seis pies franceses, que valen 7 pies castellanos, son una toesa; y 7 pies castellanos son $\frac{7}{3}$ de vara (689). Diríamos, pues, una toesa es á $\frac{7}{3}$ de vara, como 56979 á un quarto término que espresará varas castellanas, ó $1 : \frac{7}{3} :: 56979 : \frac{56979 \times \frac{7}{3}}{1} = 132951$.

De donde inferirémos que quándo ocurriere reducir á varas un número dado de toesas, no habrá mas que multiplicar este por 7 y partir el producto por 3: el cociente espresará las varas que vale el número propuesto de toesas.

Pa-

Digitized by Google

Para espresar con mayor comodidad la razon que hay entre el pie frances y los demás pies que se usan en los diferentes paises y ciudades de Europa, suponen los Matemáticos que se compone de diez partes la linea, que segun digimos (688) es la duodécima parte de la pulgada, ó la 144 parte de todo el pie. Á esta cuenta contiene el pie frances 1440 partes, de las quales espresa la tabla siguiente quántas caben respectivamente en los diferentes pies, cuyo conocimiento nos puede importar. Fig.

Suponiendo que el pie frances tiene 1440 partes.

El pie Castellano	contiene	$1234\frac{2}{7}$
El pie Romano	contiene	1320
El pie de Londres	contiene	1350
El pie de Bolonia	contiene	$1682\frac{2}{5}$
El pie de Venecia	contiene	1540
El pie Ritlándico	contiene	$1391\frac{3}{10}$

La misma tabla puede servir, segun se percibe facilmente, para reducir á pies castellanos un número propuesto de pies ingleses, romanos &c, y para saber quántas partes contiene otro pie qualquiera, suponiendo distinto el número de partes en que esté dividido el pie frances. Supongamos que esté dividido el pie frances, conforme supone Mr. de la Hire, en 720 partes, y queramos averiguar quantas caben en el pie de Londres; valiéndome de la tabla, haré una regla de tres, cuyos tres primeros términos serán 1440, 720 y 1350, ó (174) 144, 72 y 1350: el quarto término 675 manifestará que tiene el pie

Fig. pie de Londres 675 partes, quando tiene 720 el pie frances.

Despues de la vara la medida mas usada en Castilla es el estadal que se compone de 10 pies castellanos.

La vara de Castilla la de Aragon la de Valencia la cana de Cataluña	se dividen en 4 palmos;

y mediante esta division podemos señalar la razon que hay entre todas estas medidas.

95 palmos castellanos valen	88 Valencianos. 102 Aragoneses. 100 Catalanes.

De las Lineas.

691 Para egecutar las operaciones que acerca de las lineas y demas especies de estension pueden ocurrir, así en el papel como en el terreno, se han inventado varios instrumentos, cuya construccion nos toca declarar, para que se haga mas patente su utilidad, y se pueda comprobar su exactitud. Pero cómo los usos para que sirven muchos de estos instrumentos, no se distinguen de las operaciones mismas para que se han inventado, dejarémos para quando declaremos estas, manifestar cómo se han de manejar dichos instrumentos. Solo tratarémos separadamente del instrumento llamado *Compas de Proporcion* ó *Pantómetra*, por hacerle acreedor á esta especie de distincion la multitud de ope-

Digitized by Google

operaciones, á qual mas importante, que con él se egecutan con suma facilidad. Fig.

De la Pantómetra.

692 Llámase *Pantómetra* ó *Compas de Proporcion* un instrumento que se compone de dos reglas *AB*, *CD* uni- 1.
das por medio de una charnela ó gozne *E*, al rededor de cuyo centro se mueven con facilidad. En estas reglas, que llamamos las piernas de la Pantómetra, ván señaladas varias lineas que son las *lineas de las partes iguales*, *de las cuerdas*, *de los planos*, *de los polygonos*, *de los sólidos*, *y de los metales*.

693 Todos los usos del compas de proporcion se fundan en la proposicion siguiente.

Si sobre dos lineas AB, AC *que forman un ángulo* 2.
qualquiera BAC, *se toman las lineas* AB, AC *iguales*, *y las lineas* Ad, Ae *tambien iguales*, *y se tiran las lineas* BC, de; *estas lineas transversales tendrán entre sí la misma razon que los lados* AB, Ad.

Porque los triángulos *Ade*, *ABC* son ambos isósceles por construccion. Si de cada uno de estos triángulos se resta el ángulo comun *A*, la suma de los dos ángulos *Ade*, *Aed* del primero será igual á la suma de los ángulos *ABC* y *ACB* del segundo (393). Pero cada una de estas dos sumas se compone de dos partes iguales (403): luego cada parte de la primera suma es igual á cada parte de la segunda: luego será el ángulo *Ade* igual al ángulo *ABC*;

y,

Fig. y el ángulo *Aed* igual al ángulo *ACB*. Luègo las lineas *de* y *BC* (334) son paralelas, y por consiguiente se verificará (451) que *AB* : *BC* : : *Ad* : *de*, ó que *BC*: *de* : : *AB* : *Ad*.

694 De donde resulta que si se toman las lineas *AB*, *Ad* en la razon que se quisiere, habrá la misma razon entre las lineas *BC*, *de*. Por manera que si es *Ad*, por egemplo, los $\frac{2}{3}$ de *AB*, será tambien *de* los $\frac{2}{3}$ de *BC*. Si fuere *AB* el radio de un círculo, cuya cuerda de 40° sea *Ad*, será tambien *BC* el radio de un círculo, cuya cuerda de 40° será *de*. Si fuese *AB* el diámetro de un círculo duplo del círculo cuyo diámetro es *Ad*, será tambien *BC* el diámetro de un círculo duplo de otro círculo cuyo diámetro fuere *de* &c.

695 Como se puede abrir el compas de proporcion mas ó menos, segun se quiera, se le puede dar por medio de un compas comun, aplicando la una de sus puntas en *B* y la otra en *C*, á la distancia de *BC* una longitud determinada; y estando asi abierta la Pantómetra, se hallará la distancia *de* que tendrá con *BC* la razon que se buscáre.

De las Lineas de las partes iguales.

696 Las lineas de las partes iguales suelen estar divididas en 100 ó 200 partes iguales, y es arbitrario dividirlas en el número de partes que se quisiere, con tal que estén bien señaladas: quanto mayor fuere su número, tanto mas exactas saldrán las operaciones que con ellas se ege-

Digitized by Google

egecutaren. Estas partes están divididas en el instrumento Fig.
por puntos, señaladas de 5 en 5 por medio de un rasguillo, y de 10 en 10 por números.

Es lícito tomar, siempre que acomode, muchas de estas partes por una, ó una de ellas por muchas. Puedo tomar 10 por 1, en cuyo supuesto 20 será 2: puedo tomar 10 por 100, en cuyo caso 20 valdrá 200. Quando esto se practicáre se deberá dar á las partes que entre las divisiones hubiese el valor correspondiente al supuesto que se hubiere hecho.

Es de advertir, que quando usáremos de esta espresion *tomar una linea*, se deberá abrir el compas comun, de suerte que sus dos puntas caygan sobre los estremos de la linea que se hubiere de tomar. Quando digamos que se *tome un número* en la Pantómetra, se abrirá el compas comun desde el centro del de proporcion hasta dicho número; y quando digéremos que *se lleve una linea* á dos números de la Pantómetra, como á 100 y 100, por egemplo, querremos dar á entender que se deberá abrir la Pantómetra de manera que habiendo tomado con el compas comun una linea, y aplicado la una de sus puntas en el número 100 que está en la una pierna de la Pantómetra, la otra punta del compas comun cayga exactamente sobre el número 100 de la otra pierna de la Pantómetra.

Por egemplo, la fig. 3 representa que con el compas 3.
comun se toma la linea *AB*. En la fig. 4 con el compas *A* 4.
se toma en la Pantómetra el número 70, y en la misma figu-

Fig. gura se vé tambien que descansando las puntas del compas *B* en los números 90 y 90 de la Pantómetra, se ha llevado á 90 y 90 una linea igual á la distancia que coge el compas comun abierto como está.

697 Sirven las lineas de las partes iguales 1.° para *dividir una linea dada en un número de partes iguales, el que se quisiere.* Supongamos, por egemplo, que queramos

5. dividir la linea *AB* en siete partes iguales: llevarémos la linea propuesta á dos números que se puedan dividir exactamente por 7, pongo por caso á 70 y 70; manteniendo la Pantómetra abierta como para esto se requiere, tomarémos el intervalo entre 10 y 10, cuyo intervalo será la séptima parte de la linea *AB*.

Porque la distancia que hay entre el centro de la Pantómetra y el número 10 es, en virtud de lo dicho (694), á la distancia que hay entre el mismo centro y el número 70, como el intervalo entre 10 y 10 es al intervalo entre 70 y 70; pero la primera de las dos distancias es, por la construccion del instrumento, la séptima parte de la segunda: luego será tambien el primer intervalo la séptima parte del segundo que se tomó igual á la linea *AB*. Luego dicho primer intervalo será la séptima parte de la linea *AB*.

698 Si fuese la linea propuesta tan larga que no pudiera caber entre las piernas de la Pantómetra, sería preciso dividirla primero en muchas partes iguales á arbitrio; tomando despues la séptima parte de cada una, y suman-

mando unas con otras estas séptimas partes, resultaría la Fig.
séptima parte de toda la linea.

699 Se puede ofrecer tambien *dividir una linea en un número muy crecido de partes, por egemplo, en 100 partes.*

En este caso se dividirá la linea propuesta en un número de partes aliquotas de 100, ó que quepan un número cabal de veces en 100, pongo por caso en 5, cada una de las quales valdrá 20 respecto de 100, pues 20 veces 5 valen 100. Hecho esto, se dividirá cada una de las cinco partes en 2, y estará dividida la linea propuesta en 10 partes, pues la mitad de 20 es 10. Se dividirá cada una de estas partes, primero en 5 y despues en 2; y concluido esto, estará dividida la linea propuesta en 100 partes. Cada una de las partes que de esta subdivision resultáre será, como se echa de ver, la décima parte de la décima parte de la linea total, que es lo propio que la centésima parte de dicha linea.

700 2.° Se ofrece muy amenudo *determinar en un plan ó en un dibujo quántas veces una medida determinada cabe en cada una de sus diferentes partes, en sabiendo quantas cabe en alguna de ellas.* Tambien se egecuta esta determinacion por medio de las lineas de las partes iguales, conforme voy á declarar. Supongamos, por egemplo, que siendo la linea *AB* de 25 varas, se me pregunte 6.
quántas varas coge la linea *CD*.

Llevo *AB* sobre 25 y 25: tomo despues la linea *CD*, Fig. *CD*, y la llevo sobre la Pantómetra al traves, de modo que sus dos estremos descansen sobre un mismo número, por egemplo, sobre 42 y 42: este número determina el valor de la linea *CD*. Se demuestra esta operacion del mismo modo que la del número 697.

Si fuese la linea *AB* tán grande que no cupiese entre 25 y 25, se la debería llevar sobre 50 y 50, en cuyo caso las divisiones del compas de proporcion representarian medias varas; porque para representar por 12 unidades una cantidad que no tiene sino 6, es preciso que dichas unidades disminuyan en la misma razon que crece el número por el qual las quiero espresar.

701 Para *hallar una quarta proporcional* DE *á tres*
7. *lineas dadas* AB, BC, AD, se cogerá con el compas comun la linea *AB*, se pondrán sus dos puntas sobre la linea de las partes iguales, estando la una en el centro de la Pantómetra: se abrirá esta hasta que quepa en el intervalo de sus dos piernas la linea *BC*. Hecho esto, se llevará sobre la linea de las partes iguales la tercera linea *AD*; será el intervalo *DE* la quarta proporcional que se busca.

702 Si *se buscára una tercera proporcional á las dos lineas* AB, BC, estaría hecha la operacion con tomar *AD'* igual á *BC*, y seria *D'E'* la tercera proporcional que se busca. Qualquiera puede hallar despues de lo dicho (693) la razon de la operacion.

De

Digitized by Google

Fig.

De la Linea de las cuerdas.

703 Señala la linea de las cuerdas las de un círculo cuyo diámetro es igual á la longitud de la Pantómetra, y el radio á su mitad, que es igual á la distancia que hay entre el centro del instrumento y el número *6*0.

704 Para *dividir la linea de las cuerdas*, trácese en un plano separado un semicírculo cuyo diámetro *AB* sea igual á la longitud de la Pantómetra. Dividase la semicircunferencia en grados: tómese succesivamente la distancia que hubiere entre el punto *A* y cada grado, y llévese con el compas comun esta distancia sobre el compas de proporcion, poniendo siempre una punta de aquel en el centro de éste; resultarán las divisiones de la linea de las cuerdas, en la qual la distancia desde el centro á *6*0, que es la cuerda de un arco de *6*0°, es igual al radio del círculo (44*6*). 8.

705 Por medio de la linea de las cuerdas se puede

I. *Formar en el punto* A *de una recta dada* AB *un ángulo de un número determinado de grados, pongo por caso de* 30°. 9.

Desde el punto *A* como centro, y con un intervalo arbitrario se trazará el arco *EF*. Se abrirá la Pantómetra hasta que el intervalo *AE* quepa entre *6*0 y *6*0. Estando así abierto el instrumento, se tomará con el compas comun la distancia entre 30 y 30, que se llevará al arco *EF* desde *E* hasta *G*, por cuyo punto se tirará la

Fig.

AG, y serán la cuerda *EG*, el arco *EOG* y el ángulo *EAG* de 30°.

Supongamos, para manifestar la razon de esta prácti-

12. ca, que *BAC* representa la Pantómetra abierta conforme se encarga en la operacion, y que en *B* y *C* están los números 60 y 60, y en *d* y *e* los números 30 y 30. Los dos triángulos *ABC*, *Ade* son semejantes (459): luego *Ad*: *AB*:: *de* : *BC*; y por consiguiente si fuese *AB* el radio del círculo ó la cuerda de 60°, será *Ad* la cuerda de 30°; y si fuese *BC* el radio, será *de* la cuerda de 30°.

706 II. *Formar con las lineas de las cuerdas, abriendo la Pantómetra, un ángulo de un número determinado de grados, pongo por egemplo de 30°.*

Se tomará con el compas comun en la Pantómetra la cuerda de 30°, se llevará desde 60 á 60, y formarán las lineas de las cuerdas un ángulo de 30°.

Porque la cuerda de 60° es igual al radio del círculo (446), al qual pertenecen las cuerdas señaladas en el instrumento. Por consiguiente los dos radios que en dicho círculo pasaren por los estremos de la cuerda de 30° formarán un ángulo del mismo número de grados; pero con llevar desde 60 á 60 la cuerda de 30°, se hace que pasen por sus estremos dos radios del círculo, cuyas son las cuerdas de la Pantómetra: luego &c.

707 Lo mismo se practicaría para *abrir la Pantómetra de manera que las lineas de las partes iguales formasen un ángulo qualquiera, pongo por caso de 30°.*

No

Digitized by Google

No hay mas diferencia sino que para estas lineas se habria de llevar la cuerda de 30° desde 100 á 100; porque siendo la longitud de la Pantómetra el diámetro del círculo, cuyas son las cuerdas en ella señaladas, la mitad será su radio, cuya mitad en la linea de las partes iguales está en 100. Fig.

708 III. *Estando abierta la Pantómetra, determinar qué angulo forman las lineas de las cuerdas ó de las partes iguales.*

Si se busca qué ángulo forman las lineas de las cuerdas, se tomará con el compas comun el intervalo que hubiere entre *6*0 y *6*0, se llevará sobre la linea de las cuerdas, poniendo una punta del compas comun en el centro de la Pantómetra: el número de la linea de las cuerdas que encontráre la otra punta, determinará lo que se busca.

Si se buscase qué ángulo forman las lineas de las partes iguales, se tomaría la distancia que hubiere entre 100 y 100, y se practicaría lo propio que con la distancia entre *6*0 y *6*0 de las lineas de las cuerdas.

709 IV. *Hallar el valor de un arco* AB.

Se llevará el radio *CA* sobre *6*0 y *6*0, y dejando la Pantómetra abierta como para esto se requiere, se tomará el intervalo *AB*: se le llevará sobre la linea de las cuerdas al través, de forma que sus dos estremos descansen sobre un mismo número en cada pierna de la Pantómetra, pongo por caso sobre 40 y 40; y será señal de ser el arco *AB* de 40°. 10.

Fig. 11. 710 V. *Hallar el radio de un círculo dada su cuerda* AB *de un arco de un número determinado de grados, como de 50°.*

Se llevará la cuerda *AB* sobre 50 y 50, y se tomará el intervalo entre 60 y 60: este será igual al radio del círculo. En virtud de esto, desde los puntos *A* y *B* como centros, y con el espresado intervalo, se trazarán dos arcos que se cortarán en *C*, cuyo punto será el centro del círculo.

12. 711 VI. *Trazar sobre la linea* AB *un polygono regular, por egemplo un pentágono.*

Se dividirán 360° por 5, saldrá el cociente 72: despues se buscará, practicando lo que acabamos de declarar (710), el centro del círculo cuya cuerda de 72° sea la linea *AB*: llevando esta linea sobre la circunferencia del círculo, la partirá en 5 partes iguales.

De la Linea de los polygonos.

712 En la linea de los polygonos están señalados los lados de los polygonos regulares hasta el dodecágono inscriptos en un círculo, cuyo diámetro es igual á lo que coge de largo la Pantómetra, y el radio á la distancia que hay entre el centro del instrumento y el punto de la linea de los polygonos donde está el número 6.

713 Señálanse las divisiones de esta linea, con poca diferencia, del mismo modo que las de la linea de las cuerdas: se egecuta esta division describiendo un círculo con un

un radio *CA* igual á la mitad de la Pantómetra: se divide Fig.
la circunferencia por el método que se declarará mas adelante en 3, 4, 5, *6*, 7 &c. partes iguales, de suerte que 13.
sea *A* 3 el tercio de la circunferencia, *A* 4 el quarto, *A*5 el quinto &c. Se llevarán los intervalos *A*3, *A*4 &c. sobre la linea de los polygonos, poniendo la una punta del compas comun en el centro del de proporcion. Concluido esto estará hecha la division de la linea de los polygonos, en la qual se echa de ver que la distancia desde el centro al punto *6*, igual al lado del exágono, es igual al radio del círculo. Sirve la linea de los polygonos

714 I. Para *inscribir en un círculo dado un polygono regular.*

Se llevará el radio *CA* del círculo propuesto sobre *6* 12.
y *6*; y estando abierta como para esto se requiere la Pantómetra, si se quisiere inscribir un pentágono, se tomará el intervalo entre 5 y 5, y llevándole al rededor de la circunferencia, quedará ésta dividida en cinco partes iguales.

715 II. Para *describir sobre una linea dada* AB *un* 14.
polygono regular, por egemplo un eptágono.

Llévese la linea *AB* sobre 7 y 7: tómese despues el intervalo entre *6* y *6*: este será el radio del círculo, respecto del qual será *AB* el lado del eptágono inscripto.

Usos de la Pantómetra para la Trigonometría.

716 Pueden servir las lineas de las partes iguales, y de las cuerdas para la resolucion de los triángulos rec-

 ti-

Digitized by Google

Fig. tilineos; pero para esto es preciso: 1.° Que en la linea de las cuerdas estén señaladas las cuerdas de todos los grados hasta la cuerda del arco de 180°, que es la mitad de la circunferencia. 2.° Que sean de igual longitud las lineas de las cuerdas y las de las partes iguales; y si se quiere que concuerden las cuerdas con las de las tablas de los senos, es indispensable que la linea de las partes iguales esté dividida en 200, á fin de que su mitad, que es el radio, tenga 100. 3.° Es tambien preciso que las lineas de las partes iguales formen una con otra el mismo ángulo que las lineas de las cuerdas; y es muy cómodo que este ángulo sea de un número cabal de grados, como de 8 ó de 10°. El uso de estas lineas para la Trigonometría se funda en las dos proposiciones siguientes.

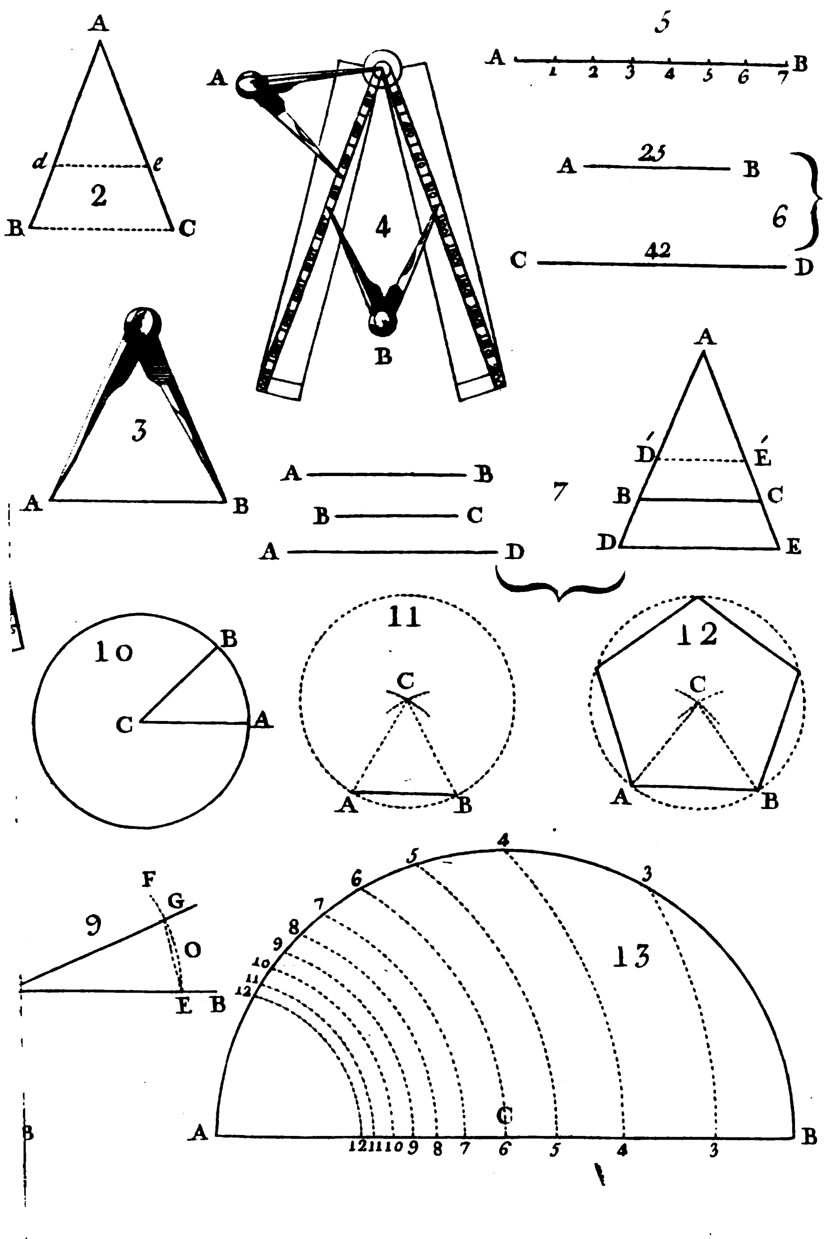
717 I. *Abriendo de varios modos las lineas de las partes iguales, se puede formar qualquiera especie de trián-*
15. *gulos como el triángulo* ABC, en el qual el lado *AC* está en la una de las piernas, *CB* en la otra, y el tercero *AB* es la distancia que hay entre el estremo del uno de los primeros lados y el estremo del otro.

16. 718 II. *Todo triángulo* ABC *puede ser inscripto en un círculo* (402); entónces el lado *AB* es la cuerda del arco *ADB*, duplo del ángulo opuesto (372): los lados *AC*, *BC* son tambien cuerdas de arcos duplos de los ángulos opuestos *B* y *A*.

Sentado esto, ya no puede dar trabajo alguno la inteligencia de lo que se practíca con la Pantómetra para la re-

Digitized by Google

Plana 422.



2
A
d e
B C
3
A B
4
A B
5
A 1 2 3 4 5 6 7 B
6
A 25 B
C 42 D
7
A B
B C
A D
D' E'
B C
D E
10
C A B
11
C A B
12
C A B
9
F G O E B
13
A B C
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Digitized by Google

resolucion de los quatro casos de la Trigonometría recti- Fig.
linea que vamos á proponer.

719 I. CASO. *Dados los tres lados de un triángulo, hallar los ángulos.*

Sea el triángulo propuesto *ABC*, cuyo lado *AC* sea 17.
de 100 varas, *AB* de 80, y *BC* de 60: se pide el valor de los ángulos.

Para hallar el ángulo *A*, tómese con el compas comun en la linea de las partes iguales el intervalo de 60 partes; valor de *BC* opuesto al ángulo *A*: manteniendo el compas comun en la misma abertura, póngase la una de sus puntas en la linea de las partes iguales, donde está el número 80, y ábrase la Pantómetra hasta que la otra punta del compas cayga sobre 100: mídase despues el ángulo que formaren las lineas de las partes iguales, se hallará que es de $37°$, y este será el valor del ángulo *A*. Se practicará lo proprio para hallar el valor del ángulo *B*, que será de $90°$; y tomando el suplemento de los ángulos *A* y *B*, se hallará ser el ángulo *C* de $53°$.

720 II. CASO. *Dados dos de los lados de un triángulo, y el ángulo que forman, hallar el tercer lado.*

Sea el triángulo propuesto *ABC*, cuyo ángulo *A* sea 18.
de $40°$, el lado *AB* de 55 varas, y el lado *AC* de 63: se pide el valor de la base *BC*.

Ábrase la Pantómetra de modo que las lineas de las partes iguales formen un ángulo de $40°$ (707): tómese en las mismas lineas el intervalo entre 55 y 63: bús-

Digitized by Google

Fig. quese en una de las lineas de las partes iguales el valor de este intervalo, se hallará 41 para el valor de la base *BC*. En conociendo por este medio los tres lados, facil será hallar el valor de los demás ángulos (719).

721 III. CASO. *Dados dos lados de un triángulo, y el ángulo opuesto al uno de ellos, hallar el otro lado.*

Sea el triángulo propuesto *ABC* cuyo lado *AB* sea
19. de 75 varas, *BC* de 55, y el ángulo *A* de 45° opuesto al lado *BC*; se pide el valor del lado *AC*.

Ábrase el compas de suerte que las lineas de las partes iguales formen un ángulo de 45°: tómese con el compas comun el intervalo de 55 partes, y manteniéndole en esta abertura, póngase la una de sus puntas en 75, la otra caerá sobre $37\frac{1}{2}$ si fuese obtuso el ángulo *C*, ó sobre 69 si fuese agudo, cuyos números espresarán respectivamente los valores del lado *Ac* ó *AC*, segun fuere el caso.

20. 722 IV. CASO. *Dado en el triángulo* ABC *el lado* AB *de* 82 *varas, y los ángulos adyacentes, es á saber, el ángulo* A *de* 47°, *y el ángulo* B *de* 63°, *hallar los demás lados.*

Tomando el suplemento de los ángulos *A* y *B*, saldrá el ángulo *C* de 70°. Tómese en la linea de las partes iguales el intervalo del lado *AB* de 82 varas, y llévese sobre las lineas de las cuerdas desde 140 á 140, duplo del ángulo *C* opuesto á 82: tómese despues el intervalo entre 94 y 94, duplo del ángulo de 47°, y llévese sobre las partes iguales; se hallará ser $63\frac{1}{2}$ el valor del lado opuesto

Digitized by Google

to *BC.* Del mismo modo sacaríamos que el lado *AC* es de Fig.
$77\frac{2}{3}$ varas.

Fúndase la operacion en que los lados de un triángulo son cuerdas (718) de arcos duplos de los ángulos á que están opuestos, en cuyo supuesto el triángulo *ABC* nos dará la siguiente proporcion para hallar el lado *BC.*

La cuerda de un arco de 140° duplo del ángulo *C*
Es á la cuerda de un arco de 94° duplo del ángulo *A*,
Como el lado *AB* de 82 V opuesto á *C*
Es al lado *BC* opuesto al ángulo *A.*

De las Lineas de los planos.

723 Llamamos *lineas de los planos* aquellas que están señaladas en la Pantómetra de manera que representan los lados homólogos de las figuras planas semejantes. Para enterarse bien del artificio con que están divididas estas lineas, es del caso saber primero cómo se reducen dos ó muchas figuras semejantes dadas á una sola que valga su suma, y sea semejante á las figuras propuestas.

724 Para egecutarlo se han de determinar los lados 21.
homólogos de las figuras semejantes cuya suma se busca. Se disponen dos *AB*, *AC* de modo que formen un ángulo recto *BAC* : la hypotenusa *BC* será el lado homólogo de la figura semejante, que será igual (517) á la suma de las dos propuestas.

Si se buscase la suma de tres figuras semejantes, despues de hallado el lado *BC*, se levantará la perpendicular

CD

Digitized by Google

CD igual al lado homólogo de la tercera figura, y se tirará la hypotenusa *BD*, que será el lado homólogo de la figura semejante é igual á la suma de las tres propuestas &c.

725 Sentado esto, no hay dificultad alguna para alcanzar cómo se trazan y dividen en la Pantómetra las lineas de los planos. Se trazan dos lineas que concurran en el centro del instrumento: y empezando desde el centro, se dividen de manera que la primera division que representa el lado del primer quadrado y el menor de todos, se señala con la unidad: la segunda division lleva 2: y representa el lado de un quadrado duplo, y prosiguiendo á este tenor la série de los números naturales, se ván señalando los lados de los quadrados que contienen al primero ó menor, dos, tres, quatro &c. veces. Por medio de las lineas de los planos se puede

726 I. *Aumentar y disminuir una figura plana en una razon dada.*

Si fuere regular la figura propuesta, como un quadrado, un pentágono, un círculo, un triángulo equiláter o, bastará hallar el lado de la figura que se busca. Supongamos que se nos ofrezca aumentar un quadrado en la razon de 4 á 9: llevo el lado del quadrado propuesto desde 4 á 4 en la linea de los planos: el intervalo entre 9 y 9 señalará el lado del quadrado que será al propuesto como 9 á 4.

Porque las lineas transversales tienen entre sí la misma razon que las laterales (693); pero las lineas 4 y 9 son los la-

lados de los quadrados que tienen entre sí la misma razon Fig.
que 4 y 9 : luego serán tambien las lineas transversales lados de quadrados que tendrán uno con otro la misma razon.

Si fuere irregular la figura propuesta, por ser indispensable hallar muchos lados para trazar la figura semejante que se busca, se repetirá tantas veces la operacion quantos lados hubiere.

727 II. *Dadas dos figuras semejantes, hallar la razon que hay entre ellas.*

Supongamos que sean las figuras propuestas dos pentágonos regulares, cuyos lados son *AB*, *CD*. Tómese el 22.
lado *AB* del pentágono mayor, y llévese sobre uno de los mayores números de la linea de los planos, pongo por caso sobre 60 y 60: tómese despues el lado *CD* del segundo, y póngase al traves sobre la misma linea, de suerte que sus estremos caygan sobre una misma division, pongo por caso sobre 40 y 40: la superficie *F* del segundo pentágono será á la superficie *E* del primero, como 40 es á 60, ó como 2 á 3: quiero decir que será sus dos tercios.

De la Linea de los sólidos.

728 Despues de lo dicho acerca de la línea de los planos, es facil adivinar para qué usos sirve la linea de los sólidos, y qué divisiones ván en ella señaladas. Contiene esta linea los lados homólogos de sólidos semejantes que todos son múltiplos del primero ó menor que se toma por uni-

Digitized by Google

unidad, segun la serie de los números 2, 3, 4 &c. hasta el número 64, que suele ser el último que se señala en la linea de los sólidos.

729 Para señalar las divisiones de esta linea se toman en una escala 1000 partes para el lado del sólido 64, que es el mayor que contiene la Pantómetra. Muy en breve declararémos la construccion y los usos de las escalas. Se toma el número de 1000 partes iguales para que salgan mas fáciles y cabales las divisiones indispensables para señalar los lados de los demás sólidos.

Por ser 4 la raiz cúbica de 64, y 1 la raiz cúbica de 1, es preciso que el lado que se toma para el sólido 64, contenga quatro veces el lado del primer sólido que es el menor de todos, cuyo lado contendrá por consiguiente 250 de las 1000 partes iguales. Porque ya que son entre sí los sólidos semejantes como los cubos de sus lados homólogos (625), serán sus lados homólogos como las raices cúbicas de los números que espresan dichos sólidos: luego el lado del sólido 64 será al lado homólogo del sólido 1, como la raiz cúbica de 64 á la raiz cúbica de 1; esto es, como 4 á 1.

Para hallar el lado del octavo sólido, ó del sólido ocho veces mayor que el primero, se tomarán 500 partes de la escala; esto es, dos veces mas que para el lado del cubo 1. Porque el lado del sólido 8 veces mayor que el primero, ha de ser al lado de este como la raiz cúbica de 8 á la de 1, esto es, como 2 á 1: luego el lado del sólido sememejante al primero, y ocho veces mayor que él, ha de tener 500 partes de la escala:

Por la misma razon 750 de estas partes espresarán el lado del sólido 27 veces mayor que el primero, pues 750 es triplo de 250, y el cubo de 3 contiene 27 veces el cubo de 1.

Bien se echa de ver quan facilmente se señalan todas estas divisiones en la linea de los sólidos: la dificultad está en señalar las que espresan los lados de los sólidos duplos, triplos &c. del primero; porque como son incomensurables sus raices, no es posible hallar su valor cabal. Pero se pueden hallar por aproximacion con una exactitud suficiente para los usos de la práctica.

730 Propongámonos hallar el lado del sólido semejante duplo del primero. Formarémos el cubo 15625000 de 250 lado del primer sólido: del duplo 31250000 de dicho cubo sacarémos la raiz cúbica, que será 315 con corta diferencia; y este número espresará el lado del sólido duplo. Porque una vez que son entre sí los sólidos semejantes como los cubos de sus lados homólogos, será duplo de otro sólido semejante aquel cuyo lado cubado tuviere por espresion un número duplo del que espresáre el cubo del lado homólogo del primero.

Sentado esto, ya podemos declarar las operaciones que se egecutan por medio de la linea de los sólidos.

731 I. Con ella se pueden *aumentar ó disminuir los sólidos en la razon que se quisiere; como si quisiéra-*

ramos hallar un cubo duplo de otro.

Para este fin se llevará el lado del cubo propuesto sobre unos números tomados á arbitrio, por egemplo sobre 20 y 20. Estando abierta la Pantómetra como para esto se requiere, se tomará el intervalo que hubiese entre 40 y 40, que es un número duplo del primero: este intervalo será el lado del cubo que se busca.

Si se me pidiera una esfera tripla de otra, llevaria el diámetro de la esfera desde 20 á 20 por egemplo: el intervalo entre 60 y 60 sería el diámetro de la esfera que se me pidió.

732 Se egecutaría al reves la operacion si se hubiesen de disminuir los sólidos en razon dada. Y si fuesen de tanta longitud los lados homólogos de los sólidos, que no pudiesen caber entre las piernas de la Pantómetra, se tomaría su mitad, su tercio &c. y lo que saliere seria la mitad, el tercio &c. de la dimension que se buscáre.

733 II. Se puede *hallar qué razon hay entre dos sólidos dados.*

Se llevará para este fin sobre la línea de los sólidos el lado de un sólido entre dos números, los que se quisiese ó mas acomodaren: despues se mirará á qué intervalo corresponde el lado del otro sólido semejante. Los números á que correspondieren dichos lados homólogos espresarán la razon que hubiere entre los dos sólidos propuestos.

734 III. *Dados muchos sólidos semejantes, hacer otro sólido semejante é igual á la suma de todos.*

Se

Se tomará entre los sólidos dados uno á arbitrio, y con el compas comun uno de sus lados, se llevará sobre los números que se quisiere de la linea de los sólidos, por egemplo sobre 5 y 5. Manteniendo abierta la Pantómetra como para esto se requiere, se mirará á qué números correspondan los intervalos que cogen respectivamente los lados homólogos de los demas sólidos, y supondrémos que correspondan á los números 7 y 8. Júntense en una suma los números 7, 8 y 5, que espresan la razon de los sólidos propuestos: el intervalo que hubiere entre los números 20 y 20 que espresan dicha suma, será el lado del sólido semejante é igual á la suma de los tres propuestos.

735 IV. *Hallar un sólido semejante á otros dos desiguales entre sí, y que sea igual á la diferencia que hubiere entre ellos.*

Llévese el un lado de qualquiera de los dos sólidos sobre dos números de la linea de los sólidos, los que se quisiere, por egemplo sobre 5 y 5: mírese á qué numeros corresponde el lado homólogo del otro sólido, y supondrémos que corresponda á los números 9 y 9: se restará el número menor del mayor: se cogerá el intervalo que hubiere entre 4 y 4, cuyo número espresa la diferencia, y este intervalo será el lado homólogo del sólido que se busca semejante é igual á la diferencia de los dos propuestos.

736 Se le añade á la Pantómetra una linea llamada *linea de los calibres*, que sirve para conocer el diferente peso de las balas de Artilleria. Por calibre de los cañones

en-

Digitized by Google

entienden los Artilleros el diámetro de la boca de dichos cañones, cuyo calibre siempre es algo mayor que el diámetro de la bala, á fin de que pueda salir mas facilmente de la pieza, y no se lo estorve demasiado el rozamiento. El calibre de un cañon que ha de arrojar balas de 33 libras, cuyo diámetro es de 6 pulgadas $\frac{25}{32}$ de linea, ha de ser de 6 pulg. 3 lin. y $\frac{12}{31}$ de linea y por consiguiente el calibre de un cañon de 33 tiene 3 lineas con poca diferencia mas que el diámetro de la bala. Las demas piezas tienen tambien su calibre proporcionado al diámetro de las balas que han de arrojar.

737 Para señalar las divisiones de la linea de los calibres, es preciso saber quánto pesa una bala de artillería de un diámetro determinado, para que sirva de término de comparacion.

Supongamos que una bala de hierro colado del peso de 4 libras tenga 3 pulgadas de diámetro: se hallarán los diámetros de las balas del mismo metal y de distinto peso del modo siguiente. Se abrirá la Pantómetra hasta que entre sus dos piernas quepa un intervalo de 3 pulgadas entre los números 4 y 4 de la linea de los sólidos. Manteniendo el instrumento en esta situacion, se cogerán con el compas comun los intervalos que hubiere entre todos los números de las lineas de los sólidos, como entre 1 y 1, entre 2 y 2 &c. se llevarán todos estos intervalos sobre una linea trazada en la Pantómetra, y donde rematáre cada uno de estos intervalos se señalará el número de la la linea de los sólidos al qual correspondiere. Fig.

Si se quisieren señalar en la misma linea los quebrados $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ de libra, se practicará lo siguiente. Tómese una bala de hierro de una libra, llévese su diámetro á la linea de los sólidos entre 4 y 4: el intervalo que hubiere entre 1 y 1 será el diámetro de una bala de $\frac{1}{4}$ de libra: el intervalo entre 2 y 2 será el diámetro de una bala del peso de $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ de libra &c.

De la Linea de los metales.

738 Es notorio que no son todos de igual peso los metales que conocemos, y que un volumen determinado, como un pie cúbico de oro, pesa mas que un pie cúbico de plata: de donde resulta que no son estos dos metales de una misma gravedad específica, por haber convenido los Matemáticos en llamar cuerpos de distinta gravedad específica aquellos que teniendo un mismo volumen tienen peso distinto. La causa de pesar un cuerpo mas que otro de igual volumen, consiste en que tiene mas materia propia ó mas partes que el segundo; porque lo que pesa en los cuerpos son las partes materiales de que se componen, y no los intersticios ó poros que entre estas hay, ora estén llenos de ayre ú otro fluido, ora estén vacios, punto que á nosotros no nos toca indagar. Consiste, pues, el mayor peso de un cuerpo en que contiene mayor número de partes que otro de igual volumen, con el qual se le compara; y como esto no puede ser sin que las tenga mas inmediatas las unas á las

Digitized by Google

Fig. otras, y separadas por menos y menores intersticios, la mayor gravedad específica de un cuerpo consiste en que sea mas compacto ó mas denso que los demas con que le comparamos: usándose en la Matemática la voz *densidad* para espresar el mayor número de partes respecto de un volumen determinado.

739 Tienen, pues, los metales mas ligeros que el oro menos densidad, ó sus partes mas separadas que este metal. Por consiguiente un cubo, por egemplo, de estaño de igual peso que un cubo de oro, cogerá mas espacio, ó será de mayor volumen que un cubo de oro, y de un volumen tanto mayor quanto menor fuese la densidad del estaño respecto de la del oro. Y como, segun llevamos dicho (738), y se prueba en la Mecánica, la densidad y la gravedad específica son una misma cosa, serán los volúmenes de dos sólidos semejantes de igual peso y de distintos metales en razon inversa de sus densidades ó gravedades específicas, y serán tambien las gravedades específicas en razon inversa de los volúmenes. Pero los volúmenes de los cuerpos son (625) como los cubos de sus lineas homólogas: serán, pues, las gravedades específicas en razon inversa de los cubos de las lineas homólogas de los cuerpos.

740 En esto se funda la division de la linea de los metales que vá señalada en la Pantómetra, cuya linea está dividida en la proporcion de los lados homólogos de los cuerpos semejantes de peso igual hechos de diferentes metales. Supongamos que se conozcan las gravedades especí-

fi-

Digitized by Google

ficas de los metales : quiero decir que sepamos quánto pesa Fig.
un pie cúbico de cada uno, y que con ellos se hagan sólidos semejantes de igual peso, por egemplo esferas : que el diámetro de la bola de estaño, que es el mas ligero de los metales, esté dividido en 1000 partes iguales, y que se busque quántas de estas partes contendrá el diámetro de una bola de oro del mismo peso.

Ya que son entre sí las esferas (625) como los cubos de sus diámetros, serán los volúmenes de dichas bolas, ó los cubos de sus diámetros, en razon inversa de su gravedad específica : de donde sacarémos la siguiente analogía :

Como la gravedad específica del oro
Es á la gravedad específica del estaño,
Así el cubo del diámetro de la bola de estaño
Es al cubo del diámetro de la bola de oro.

De donde resulta, que para hallar el diámetro de la bola de oro del mismo peso que la de estaño, se ha de multiplicar la gravedad específica del estaño por el cubo del diámetro de la bola de este metal, dividir el producto por la gravedad específica del oro, y sacar la raiz cúbica del cociente.

Por el mismo método se hallarán los diámetros de las bolas de los demas metales de igual peso que la de estaño.

741 Se tira, pues, una linea recta en la Pantómetra desde su centro hasta el estremo: se la divide en 1000 partes iguales, porque suponemos que tiene otras tantas el diá-

Digitized by Google

Fig. diámetro de la bola de estaño: se busca por el método espresado quántas de estas partes corresponden á los diámetros respectivos de las bolas de los demas metales de igual peso que la de estaño; y llevando estas partes á la Pantómetra con el compas comun, poniendo la una punta de éste en el centro del instrumento, se pone en el punto donde remata la otra punta, la señal característica del metal correspondiente. Siguiendo esta práctica se halla que siendo de 1000 partes el diámetro de la bola de estaño, corresponden á los diámetros de las bolas del mismo peso hechas de los demas metales, las que espresa la tabla siguiente, donde van los caracteres con que se distinguen los metales unos de otros.

Oro	☉	730
Plomo	♄	863
Plata	☾	894
Cobre	♀	937
Hierro	♂	974
Estaño	♃ ...	1000

En cuya tabla se puede reparar que están los metales mas cerca del centro del instrumento, conforme es mayor su gravedad específica, y se puede inferir de lo dicho antes (539).

742 Sirve la linea de los metales: I. para *hallar un globo de qualquiera metal de un peso determinado, conociendo un globo de otro metal y su diámetro.* Supongamos que el diámetro de una bala de hierro de una libra sea de 2 2 li-

lineas, y que se pida el diámetro de una bala de plomo del mismo peso.

Tómese sobre un pie con el compas comun la abertura de 22 lineas, llévese este intervalo desde ♂ á ♂ : tómese despues el intervalo entre ♄ y ♄ : llévese despues sobre el pie, se hallará que coge 18 lineas que espresarán el diámetro de la bala de plomo de una libra.

Considérese que segun está construida la linea de los metales, las distancias entre el centro de la Pantómetra y las divisiones de esta linea representan los diámetros de los cuerpos semejantes de igual peso hechos de diferentes metales. Pero las distancias ó intervalos que hay entre las mismas divisiones de las lineas de los metales estando abierta la Pantómetra, son entre sí como las distancias (*693*) desde el centro del instrumento á cada una de dichas divisiones: luego el intervalo entre ♄ y ♄, ó entre los caracteres que señalan el plomo, representa el diámetro de una bala de plomo de igual peso que la bala de hierro, cuyo diámetro es igual al intervalo que hubiere entre los caracteres del hierro.

743 II. Para *hallar la razon que hay entre el peso de dos cuerpos semejantes hechos de distintos metales, y que tienen diámetros iguales.*

Supongamos que siendo de 32 onzas el peso de una bola de plata, se me pregunte quánto pesará una bola de oro de igual diámetro.

Tomaré en la linea de los sólidos el intervalo entre

Fig. el centro y 32, le llevaré desde ☉ á ☉ sobre la linea de los metales: tomaré despues el intervalo entre ☾ y ☾, y le llevaré sobre la linea de los sólidos, poniendo en el centro de la Pantómetra la una punta del compas comun; la otra caerá sobre 59, y manifestará que pesa 59 onzas la bola de oro de igual diámetro que la de plata.

Para percibir el fundamento de esta operacion conviene considerar que quando son iguales los cuerpos, los pesos son entre sí como las gravedades específicas de los metales; pero vimos antes (739) que las gravedades específicas son en razon inversa de los volúmenes; y los volúmenes son como los cubos de los diámetros, esto es, para el caso presente, como los cubos de las divisiones de la linea de los metales: luego son las gravedades específicas y por consiguiente los pesos, quando son iguales los volúmenes, en razon inversa de los cubos de las divisiones de las lineas de los metales. Por lo que el peso de la bola de plata es al de la de oro de igual diámetro, como el cubo de la distancia que hay en la linea de los metales de la Pantómetra desde el centro del instrumento á la señal del oro, es al cubo de la distancia desde el mismo centro á la señal de la plata; ó por razon de lo dicho (693), el peso de la bola de plata es al de la de oro como el cubo del intervalo entre los dos caracteres del oro, es al cubo del intervalo entre las dos señales de la plata. Como la linea de los sólidos dá la razon de los cubos de las divisiones que en ella están señaladas (728), y como la distan-

cia

Digitized by Google

cia entre los dos caracteres del oro contiene 32 de estas divisiones, y la distancia entre los caracteres de la plata coge 59, se infiere que el peso de la bola de plata es al peso de la bola de oro de igual diámetro, como 32 es á 59. Luego &c. Fig.

744 III. *Para averiguar qué cantidad se requiere de un metal determinado para hacer con él un cuerpo semejante é igual á otro hecho de qualquiera de los otros metales.*

Supongamos que alguno quiera hacer de plata una estatua semejante é igual á otra hecha de estaño, y pregunte qué cantidad de plata necesitará.

1.° Se pesará con cuidado la estatua de estaño, y supondrémos que pese 36 libras.

2.° Se tomará en la linea de los metales la distancia desde el centro de la Pantómetra al caracter de la plata con la qual se quiere hacer la estatua.

3.° Teniendo abierto el instrumento se llevará esta distancia á las lineas de los sólidos desde 36 á 36.

4.° Finalmente se tomará en la misma linea de los metales la distancia desde el centro del instrumento á la señal del estaño: manteniendo la Pantómetra abierta como se requiere para lo dicho, se mirará á qué números de la linea de los sólidos corresponde esta distancia: y suponiendo que corresponda á 50 y 50, este número espresará que se necesitan 50 libras de plata para hacer una estatua ú otro cuerpo semejante é igual al propuesto.

745 IV. Para *hallar qué razon tienen entre sí los*

Digitized by Google

Fig. *pesos de dos cuerpos semejantes y de distintos metales, siendo conocidos sus diámetros ó lados homólogos.*

23. Supongamos que siendo *EF* el diámetro de una bola de estaño, y *GH* el de una bola de plata, se pregunte qué razon hay entre los pesos de las dos bolas.

Llévese el diámetro *EF*, abriendo la Pantómetra, desde ♃ á ♃, quedando abierto el instrumento como para esto se requiere: tómese el intervalo que hubiere entre ☾ y ☾: si fuere este intervalo igual al diámetro *GH*, serán de igual peso ambas esferas: si fuere menor que *GH* el diámetro de la bola de plata, y fuese igual á la linea *KL*, será señal que pesa menos la bola de plata que la de estaño.

Para averiguar quánto menos pesa, se deberán cotejar los diámetros *GH* y *KL* en la linea de los sólidos, conforme voy á declarar. El intervalo hallado entre los caracteres de la plata, que en el caso presente es *GH*, se llevará al intervalo entre dos números de la linea de los sólidos los que se quisiere, por egemplo entre 60 y 60: se mirará despues á qué números de la misma linea corresponda, puesto transversalmente, el diámetro *KL* de la bola de plata: y suponiendo que corresponda á 20 y 20, será señal de que el peso de la bola de plata cuyo diámetro es *KL*, es al peso de la bola de estaño cuyo diámetro es *EF*, como 20 á 60.

746 V. Para *hallar el diámetro de una bola de un metal determinado, cuyo peso sea de una cantidad determina-*

Digitized by Google

nada, conociendo el peso y diámetro de otra bola hecha de Fig.
qualquiera de los otros metales.

Supongamos que representa *MN* el diámetro de una 24.
bola de cobre que pesa 10 libras, y que se pide el diámetro de una bola de oro que pese 15 libras.

1.° Se buscará el diámetro de una bola de oro del mismo peso que la de cobre, llevando *MN* desde ♀ á ♀, y tomando el intervalo que hubiese, estando así abierto el instrumento, entre los caracteres del oro, cuyo intervalo *OP* será el diámetro de una bola de oro del peso de 10 libras.

2.° Se llevará este intervalo *OP* á la linea de los sólidos desde 10 á 10; y estando abierta la Pantómetra como para esto se requiere, el intervalo entre 15 y 15 de las lineas de los sólidos espresará el diámetro *QR* de una bola de oro del peso de 15 libras.

Métodos para tirar lineas.

Son varios los casos que pueden ocurrir, segun varian las condiciones con que se han de tirar las lineas; porque se puede ofrecer 1.° tirar una linea recta desde un punto á otro: 2.° tirar una linea perpendicular á otra: 3.° tirar una linea paralela á otra.

747 Quando las lineas se han de tirar en el papel, se hace uso de una regla, instrumento tan conocido, que tenemos por superfluo representarle. Para *tirar con la regla una linea recta desde un punto á otro* se aplica este instru-

Fig. trumento sobre los dos puntos dados, ó muy cerca de ellos y á igual distancia de cada uno, y haciendo correr á lo largo de la regla un lapiz ó una pluma, queda trazada la linea.

Para averiguar si está bien hecha una regla, se debe tirar una linea á lo largo de ella con una punta muy sutil: se aplicará despues la esquina de dicha regla (que sirvió para tirar la linea) de diferentes modos y lados sobre la linea, y se verá si se ajusta exactamente con ella; y si se ajustáre la regla y la linea, estarán derechas: ó tambien se puede aplicar sobre la linea que se tiró ó sobre la esquina de la regla un pelo bien tirante, y si se ajustare bien con la linea ó con la esquina de la regla en toda su longitud, será señal de que es buena.

Para reconocer si una regla está bien derecha suelen aplicarla los oficiales sobre otra regla de metal, de cuya exactitud están asegurados. Pero para sacar derecha esta regla de metal es preciso hacer dos á un tiempo, y recorrerlas con mucho cuidado y delicadeza con la lima hasta que se ajusten exactamente sus aristas, aplicando estas reglas la una al lado de la otra de todos los modos posibles; y aun para asegurarse mas de que una regla está bien derecha, es preciso hacer tres.

Quando las reglas han de servir para tirar lineas con una punta ó con el lapiz pueden ser muy delgadas; pero quando se han de tirar con ellas lineas de tinta, han de ser algo mas gruesas. Algunos las hacen con un chaflan á

fin

Digitized by Google

fin de que pegándose la tinta á la regla, no manche el papel, y la vuelven boca abajo para servirse de ella. Fig.

748 Para *tirar lineas en el terreno ó en planos grandes*, se hace uso algunas veces de un compas llamado *compas de varas*, y es una regla de metal ó madera, armada con dos puntas de acero moviles para afianzarlas á la distancia que se quiera la una de la otra. Están clavadas estas dos puntas al borde de dos cajas, por dentro de las quales pasa la regla, y en cada una de las cajas hay un tornillo para fijarla en el punto que se quiera de la regla. *AB* es la 25.
regla que ha de tener quatro ó cinco pies: si fuere de madera, es preciso que sea dura y compacta para que no se tuerza. *C* y *D* son las dos cajas de alaton, á las que están clavadas las dos puntas de acero que han de ser indispensablemente perpendiculares á la regla. Con la mira de hacer mas perceptibles las diferentes partes de estas reglas, representamos una en grande en la fig. 26: la punta 26.
de esta caja es *G*, el tornillo *F*; ambos son de acero. El estremo del tornillo no se aplica inmediatamente sobre la regla para que no la rehunda, sino sobre una hoja de acero *HL* que arrimándose á la regla, la aprieta y sujeta de modo que no pueda correrse.

749 Quando se quiere *trazar una circunferencia con este compas*, se apartan las dos cajas hasta que haya entre las dos puntas que llevan una distancia igual al radio del círculo que se ha de trazar: se aplica despues la una punta del compas en el punto que ha de servir de centro, y se

Digitized by Google

Fig. se le hace dar la vuelta al rededor de este punto, de modo que la otra punta deje en el plano un rastro que señalará la circunferencia.

750 Sirven tambien unos piquetes grandes llamados *jalones*, bien derechos ó labrados, con una punta de hierro en la parte de abajo, y hendidos por la parte de arriba, á fin de que sean bien perceptibles, aun colocándolos á mucha distancia unos de otros, al tiempo de egecutar las operaciones para que sirven, poniendo en las hendiduras pedazos de carton ú otra cosa muy reparable.

27. 751 I. Si se quiere *trazar una linea bastante larga*, se afianza en el punto *A* el estremo de un bramante dado de almazarron; y teniéndole muy tirante, aplicando otro de sus puntos en el punto *B*, se le levanta para dejarle caer, y dando contra el plano, deja estampada en él la linea recta que se quiere tirar.

28. 752 II. Para *trazar una linea en un terreno llano*, se tomará un piquete *A*, se le levantará en alto, se le dejará caer á plomo, y se le clavará en el suelo colocándole lo mas perpendicular que se pueda. A la distancia de unos 30 pasos por donde ha de pasar la linea, se plantará otro piquete *B*, que con el primero determinará la direccion de la linea que se ha de trazar. A igual distancia de este segundo se plantará otro piquete *C*, de manera que le vaya á encontrar el rayo visual que pasa por el estremo de los otros dos, y se plantará verticalmente conforme se dijo del primero. En estando clavado firme, se pro-

procurará ponerle bien derecho, porque suele torcerse algo al tiempo de afirmarle, para que vuelva á estar en la direccion del espresado rayo visual: de modo que mirando desde el piquete *C* al piquete *B*, no se pueda ver el primero *A*, ó que si este se vé, como sucede en los terrenos desiguales, pase directamente el rayo por los tres puntos *A*, *B* y *C*. Fig.

Se comprueba esta operacion apartando el ojo del piquete *C* ácia la derecha y ácia la izquierda á igual distancia, mirando al piquete *A*. Si se vé tanto por el un lado como por el otro, será señal de estar bien plantado el piquete *C*, pues estará en frente del medio del segundo *B* por donde ha de pasar la linea recta. Del mismo modo se plantarán los demas, valiéndose siempre de dos para plantar el tercero.

753 Síguese de este método que la cabeza y el pie de los jalones están, quanto es posible, en el plano vertical de la linea. Si se hiciese uso de piquetes curvos, como es forzoso en algunas ocasiones, se deberá poner cuidado en que esté en el mismo plano vertical su curvatura con la cabeza y el pie: esta prevencion es de suma importancia.

754 III. Quándo se haya de *trazar una linea recta cuesta arriba*, es menester que el último jalon *C* que está al pie de la cuesta, sea mas delgado que los otros, y esté muy á plomo. Se plantará en la cuesta, y bastante cerca del jalon *C*, otro jalon *D* del mismo grueso que *C*, para alinear las puntas *C* y *D* con el pie del jalon *B* que ha 29.

de

Fig. de estár en el plano vertical de la linea en que están los piquetes *A* y *B*.

30. Si fuera la cuesta tan empinada, que á poco que se subiera, no fuese ya posible alinear las cabezas de los jalones *C* y *D* con el pie del jalon *B*, se volvería al jalon *C* para plantar un jalon *Z* muy corto en el plano vertical de la linea *ABC*; y hecho esto, se plantará el jalon *D* en la direccion *CZ*.

Se comprueba la operacion ácia lo alto de la cuesta, donde se podrán hallar dos jalones como *E* y *F*, desde los quales se mirará á alguno de los jalones de la llanura como *A* y *B*, con los quales ha de convenir exactamente el rayo visual.

31. 755 IV. Si se quisiese *proseguir la linea en lo alto de la cuesta*, se plantará un jalon muy chico y delgado en *D*, desde donde se puedan ver los dos últimos *C* y *B* de la subida: á corta distancia se plantará otro en *E* algo mas alto en la direccion de la linea *CD*: se plantará otro *F* mas grueso, por medio del qual se podrá prolongar la linea ácia *H*.

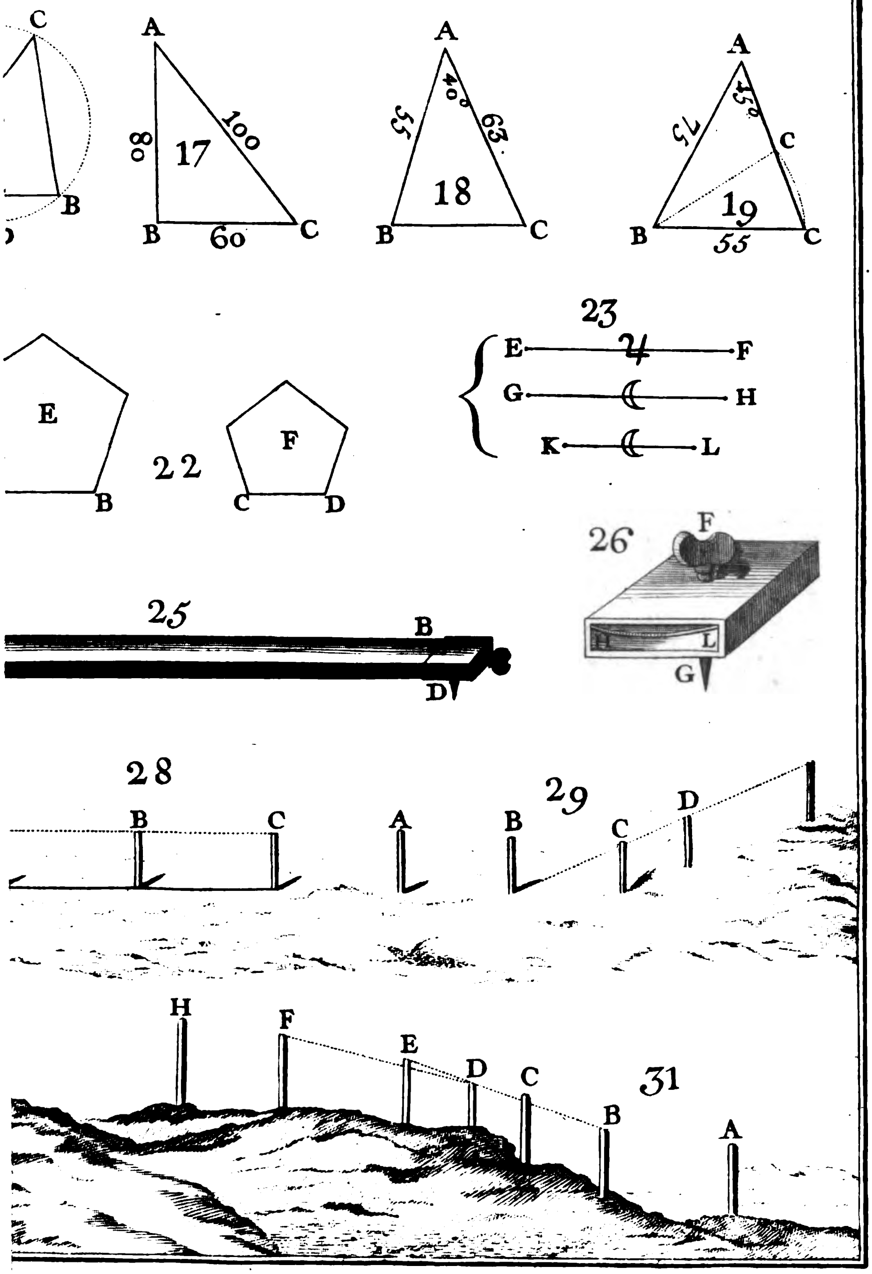
Quando el terreno es muy montuoso, es menester valerse de jalones mas cortos y mas delgados, y plantarlos proporcionalmente: despues se ván aumentando poco á poco hasta llegar á lo llano donde sirven los de grueso natural.

756 La misma operacion puede servir para trazar una linea cuesta abajo, quando se ha de prolongar en la llanura.

V.

Digitized by Google

Plana 446.


C
B
A
80
17
100
B
60
C
A
40
55
63
18
B
C
A
45
75
C
19
B
55
C
23
E
F
G
H
K
L
E
B
22
F
C
D
26
F
H
L
G
25
B
D
28
B
C
A
B
29
C
D
H
F
E
D
C
31
B
A

Digitized by Google

757 V. Si *la linea ha de atravesar un barranco* AD, Fig.
despues de prolongada la linea hasta *C*, practicando lo que 32.
acabamos de decir, se deberán alinear los dos últimos jalones *C* y *D* con los dos primeros *A* y *B*: si el rayo visual *CD* pasa por los jalones *A* y *B*, y los jalones intermedios del barranco ácia *E* estuvieren en el plano vertical de la linea, será perfectamente recta.

Si fuese la distancia *AD* tan grande que sea dificil distinguir los jalones de los estremos, se enviará un peon á que tenga un sombrero detras del jalon *A*, con lo que se percibirá mejor el carton del jalon *B*.

758 VI. Supongamos que se quiera *tirar una recta*
GH *entre las dos torres* G *y* H *que distan la una de la* 33.
otra algunas leguas.

Se plantará un jalon *B* ácia el medio: á corta distancia se plantará otro *A* alineado con *BG*: el que hiciere la operacion, tendrá que volver á *B*, para ver si el rayo visual *BA* vá á parar al medio de la torre *H*: si se desvia, supongamos, ácia la derecha, plantará el jalon *B* ácia la izquierda, y volverá á plantar el jalon *A* de manera que esté alineado con la nueva direccion *BG*: volverá á mirar si el rayo visual *BA* se termina en *H*: si se aparta todavia, se repetirá lo que hemos dicho, hasta que la linea *AB* sea la prolongacion de *BAH*.

Estando bien colocados los dos piquetes *A* y *B* de la linea *GH*, se enviará un peon para que plante un jalon *C*, que deberá estár en la direccion del rayo *AB* prolonga-

do

Digitized by Google

Fig. do hasta *G*. Se mandarán plantar del mismo modo los otros piquetes ácia adelante, teniendo cuidado de alinearlos bien, no solo con los dos jalones precedentes, sino tambien con el medio de la torre *G* que se percibirá mejor á medida que se acerque mas á ella el que hace la operacion: del mismo modo se trazará la linea *BAH*.

759 VII. Si *entre los dos puntos dados* A *y* B *hu-*
34. *biese algun obstáculo que impida colocar los piquetes en linea recta desde* A *á* B *valiéndose del rayo visual*: desde cada punto como centro, y con un mismo intervalo que sea mayor que la longitud del obstáculo, descríbanse con el compas de varas los dos arcos de círculo *C* y *D*: tírese una linea *CD*, que toque estos dos arcos: tómense lo mas cerca que se pueda del obstáculo los dos puntos *E* y *F*, desde los quales, como centros, descríbanse los dos arcos *G* y *H* con el mismo intervalo que los antecedentes: por los puntos *A* y *B* tírense tangentes á los arcos *G* y *H*: estas formarán la linea recta que se desea.

760 VIII. *Pero si hubiese tales obstáculos, que no fuese practicable lo que se acaba de decir*, se puede acudir á la Trigonometría.

35. Se tomará un punto *C* fuera de la línea *AB* que se quiere trazar, que sea tal que desde él se puedan vér los dos estremos *A* y *B*: se medirán las distancias *AC*, *BC*, sea inmediatamente, sea formando triángulos cuyos lados sean estas lineas, y que se puedan calcular. Entónces en el triángulo *ACB* serán conocidos los dos lados *AC*, *CB*, y se

se buscará el valor del ángulo comprehendido *ACB* por el Fig.
método que declararémos mas adelante; se podrá, pues, calcular el ángulo *BAC* (677). Hecho esto, se mandará plantar, segun la direccion que se quisiere *CD*, muchos piquetes; y midiendo el ángulo *ACD*, serán conocidos en el triángulo *ACD* el lado *AC* y los dos ángulos *A* y *ACD*. Será, pues, facil (672) calcular el lado *CD*. Concluido esto, se proseguirá plantando piquetes segun la direccion *CD*, hasta haber corrido una distancia igual á la calculada; y el punto *D* donde rematáre, estará en la linea recta que vá desde *A* á *B*.

761 *Si no fuese posible hallar un punto* C, *desde el qual se pudiesen ver á un tiempo los dos puntos* A *y* B, se usaría del rodeo siguiente.

Se buscaría un punto *C* desde el qual se pueda ver el 36.
punto *B*, y otro punto *E* desde el qual se pueda ver el punto *A* y el punto *C*. Midiendo ó determinando, por alguno de los medios que espresarémos quando tratémos del modo de medir lineas, las distancias *AE*, *EC* y *CB*, se observará en el punto *E* el ángulo *AEC*, y en el punto *C* el ángulo *ECB*. Hecho esto, en el triángulo *AEC* se conocerán los dos lados *AE*, *EC*, y el ángulo *AEC* que forman, y se calculará en virtud de lo dicho (677) el lado *AC*, y el ángulo *ECA*: restando el ángulo *ECA* del ángulo observado *ECB*, saldrá el ángulo *ACB*; y como estará calculado *AC* y se habrá medido *CB*, quedará reducido este caso al antecedente, del mismo modo que si

Digitized by Google

Fig. desde el punto *C* se viesen los dos *A* y *B*; y se concluirá la operacion del mismo modo.

762 IX. Si se hubiese de *tirar en una superficie curva no una linea recta, porque esto es imposible, sino una linea cuyos puntos estuviesen todos en un mismo plano*, se-
37. ría menester conocer tres puntos *A*, *B*, *C*: se aplicaría despues una regla sobre el punto del medio *B*, si fuese convexa la superficie, y sobre los dos puntos estremos *A* y *C* si fuese cóncava, y se dispondria la regla de tal modo que bajando y levantando el ojo que suponemos está en *D*, los bordes de la regla oculten los otros puntos. Manteniendo el ojo en esta situacion, se señalarian sobre la superficie curva muchos puntos muy cerca los unos de los otros á lo largo de la regla, y se tirarian con una regla flexible lineas desde el uno al otro punto.

En lugar del ojo se puede usar de una vela encendí-
38. da *D* que esté bastante distante para que forme muy poco reflejo: despues se tirará la linea *ABC* á lo largo de la sombra de la regla, conforme se dijo poco ha.

763 Para *tirar en el papel una linea perpendicular á una linea dada*, fuera de los métodos declarados (319 y sig.) en la Geometría Elemental, hay otro mas breve por medio
39. de la *Escuadra ABC*, que hay en qualquier estuche de Matemática. Suele ser este instrumento de alaton, con una charnela en *B*, para que doblado quepa en el estuche; pero los que dibujan mucho suelen tener tambien otra escua-
40. dra *B* de una madera dura y lisa, que tambien sirve para

ti-

Digitized by Google

tirar líneas paralelas. Se reconoce si es exacta la escuadra trazando con ella un ángulo recto *ABC* en un plano, y tirando la hypotenusa, desde cuyo medio *D* como centro y con el intervalo *DA*, se trazará un semicírculo; sí este pasa por el vértice *B* del ángulo, será exacta la escuadra. Se comprueba tambien este instrumento tirando con él sobre la linea *AB* la perpendicular *BC*, sobre *BC* la perpendicular *BD*, sobre *BD* la perpendicular *EB*, y finalmente sobre *EB* una perpendicular que se confundirá con la *AB*, si fuere exacta la escuadra. Fig. 41. 42.

764 Para *tirar una perpendicular en el terreno*, como si por un punto *A* fuera de una linea *BC* ocurriese bajar en el terreno una perpendicular; se asegurará en *A* el medio de una cuerda: se atarán muy tirantes sus dos estremos en los puntos *B* y *C* de la linea dada: se dividirá *BC* en dos partes iguales en *D*; y tirando *AD*, esta será la perpendicular. Porque tendrá dos de sus puntos *A* y *D* á igual distancia de los estremos *B* y *C* de la linea dada (318). 43.

765 *Si estuviese el punto* A *ácia el estremo de la linea recta* DC; se ataría tirante la cuerda segun la direccion *AC*: se partiría en dos partes iguales en el punto *E*: se tomaría la cuerda *ED* igual á la mitad *EC*, y tirando *AD*, esta sería la perpendicular que se desea. 44.

Porque las lineas *ED*, *EC*, *EA* son iguales, y por consiguiente el círculo trazado desde *E* como centro y con el radio *ED*, pasará tambien por los puntos *A* y *C*:

 lue-

Digitized by Google

Fig. luego pasa el ángulo *ADC* por los estremos del diámetro, y será recto (376): luego &c.

766 La operacion contraria se egecutaría con igual

43. facilidad. Supongamos que *desde el punto* D *se quiera levantar una perpendicular.*

Se tomarán al uno y otro lado los puntos *B*, *C* igualmente distantes de *D*: se doblará una cuerda cuyos estremos se asegurarán en los puntos *B*, *C*, y se tirará por el medio *A* de la cuerda y el punto *D*, la linea *AD* que será la perpendicular que se pide.

44. 767 Si *estuviese el punto* D *en el estremo de la linea*, se practicaría con poca diferencia lo que antes; esto es, se formaría sobre *DC* un triángulo isósceles, conforme se dijo, cuyo vértice estará en *E*: se prolongará *CE* hasta que *AE* la sea igual, y por los puntos *A* y *D* se tirará la linea *AD* que será la perpendicular.

768 Para tirar perpendiculares en el terreno, es de

45. mucho uso el instrumento llamado *Cartabon* ó *Escuadra de Agrimensor* que se compone de un círculo de alaton bastante grueso, de quatro, cinco ó seis pulgadas de diámetro: se le divide en quatro partes iguales por medio de dos lineas que se cortan á ángulos rectos en el centro. En los quatro estremos de estas lineas, y en medio de lo ancho ó del limbo del círculo, se colocan quatro pínulas bien remachadas en agugeros quadrados, y hendidas muy perpendicularmente, de modo que las hendiduras correspondan á las líneas que dividen el círculo en quatro partes iguales: en el

es-

Digitized by Google

estremo inferior de cada hendidura suele haber unos agu- Fig.
geritos que sirven para vér mejor los objetos en el campo.

Toda la perfeccion de este instrumento consiste en que estén exactamente hendidas á ángulos rectos las pínulas.

769 *Para vér si es exacto*, plántense dos piquetes *D* y *E* distantes el uno del otro, y en las direcciones de 46.
los dos rayos visuales *AB* y *AC* que forman el ángulo recto *BAC*: vuélvase despues la escuadra de modo que el rayo visual *AB* se dirija ácia el piquete *E*, y repárese si el rayo *AF* que forma el segundo ángulo recto contiguo, corresponde exactamente al piquete *D*; y si fuese así, será buena la escuadra. Aunque baste la igualdad de estos dos ángulos rectos para la prueba de este instrumento, porque los otros dos *CAG* y *FAG* son sus opuestos al vértice, bueno será verificarlos tambien, haciéndole dár á la escuadra una vuelta entera.

Suele afianzarse la escuadra por medio de una virola, que tiene en su centro por la parte de abajo, en un pie que suele ser de unos cinco pies de alto, y como de dos pulgadas de diámetro. Por la parte de abajo ha de tener este pie una punta de hierro, y por la de arriba ha de estar guarnecido de alaton, para que encaje firmemente en las virolas de la escuadra ó de los otros instrumentos que se le quieran aplicar.

770 El pie que acabamos de pintar bastaría si todas las operaciones para que suele servir el cartabon, se hubieran de egecutar en parages cuyo piso fuese de tierra;

Digitized by Google

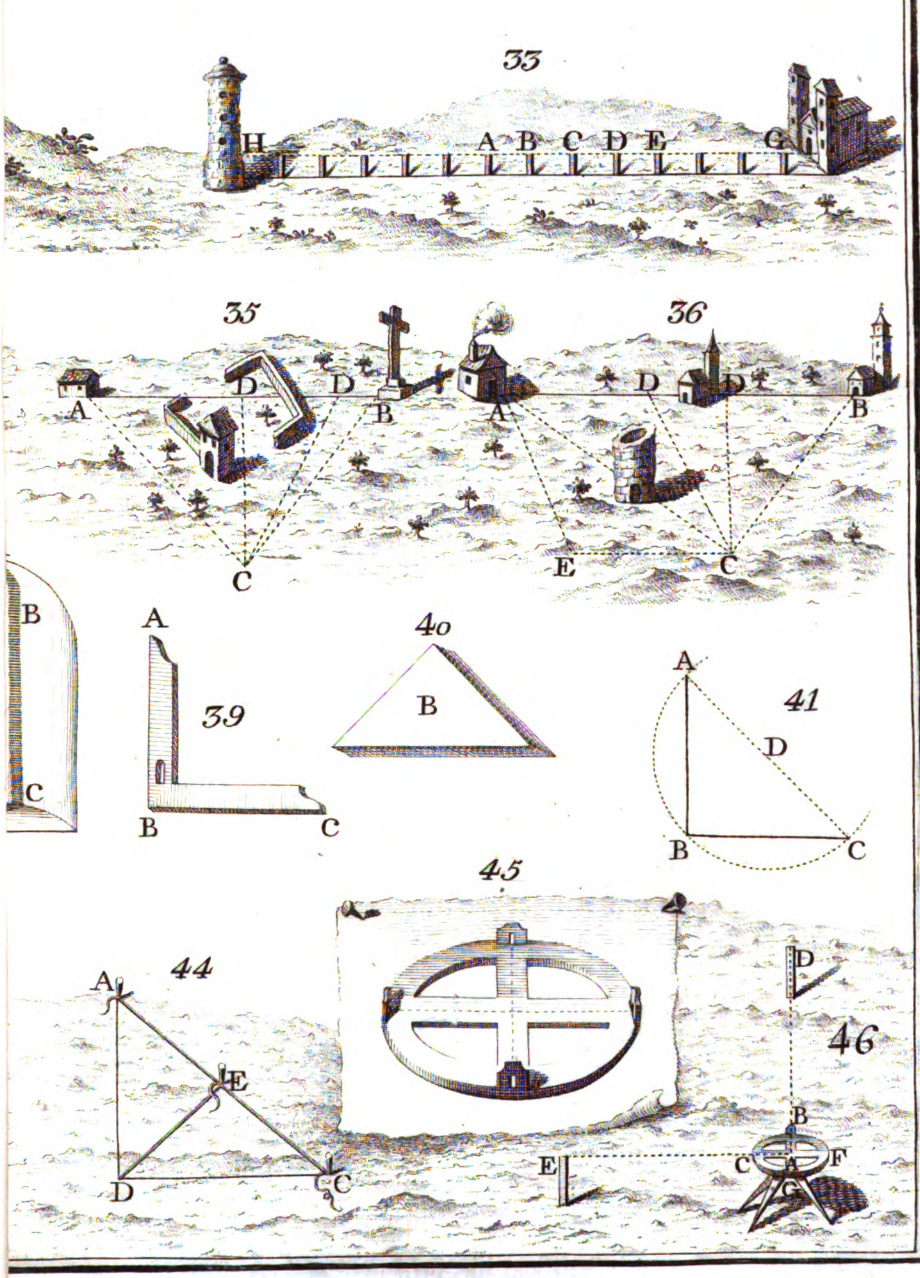
Fig. pero no es de utilidad alguna en los parages donde hay peña; por lo que se hace uso de otro pie compuesto de tres
47. piernas *BC*, *BD*, *BE*, que se doblan sobre el palo triangular *AB* por medio de tres tornillos de alaton puestos en su parte inferior *B*: el estremo superior *A* ha de tener las mismas circunstancias que el pie de que hablamos antes.

771 Supongamos ahora que *en el punto* E *de una linea se la quiera levantar una perpendicular*; se plantará el
48. pie del cartabon en el punto *E*, alineando el estremo superior con la linea *BA* ó *OF*: despues se pondrá el cartabon de modo que por el rayo visual que pasa por las pínulas 1 y 2, se vean igualmente al uno y otro lado los jalones *A* y *B*: se enviará despues un peon para que tenga en el punto *C* á su derecha un jalon: se le hará seña de que le arrime ó le aparte de sí hasta que el pie esté en medio del rayo visual que pasa por las otras dos pínulas 3 y 4, y despues se le afirmará: hecho esto, se mirará por las mismas pínulas para que la cabeza y el pie del jalon se pongan en medio del mismo rayo visual: treinta pasos mas allá se plantará otro jalon *D* del mismo modo. La linea *CD* se podrá proseguir, y será perpendicular á la base *AB*, si fuere exacto el cartabon.

49. 772 *Si en lugar del punto* E *fuese dado el punto* H esto es, un punto fuera de la linea dada *AB*; se plantará el cartabon con poca diferencia enfrente sobre la linea *AB*: se mirará despues si el rayo *FX* pasa muy cerca del punto *H*, y se abanzará el que hiciere la operacion lo que fue-

Digitized by Google

Plana 454.



Digitized by Google

Digitized by Google

fuere menester, haciendo la misma prueba hasta encontrar Fig.
con el punto *E*, desde el qual se podrá tirar la perpendicular *EH*.

773 El cartabon y su pie han de estár muy á plomo, porque una corta inclinacion ocasiona mucho error.

774 Quando se trate de *tirar una perpendicular á una pared por un punto dado*, podrá hacerse la operacion de dos modos.

I. *Si el punto* A *está en un parage inmobil fuera de la* 50.
pared, aplíquese la una punta de un compas sobre este punto *A*, y la otra sobre la pared, en la qual se señalarán tres puntos *B*, *D*, *E* igualmente distantes del punto *A*: búsquese el centro del círculo que pasaría por estos tres puntos: la linea tirada desde este centro al punto *A* será perpendicular á la pared (318).

775 II. Se puede hacer uso de una *escuadra doble*; 51.
esto es, de una esquadra de tres piernas, en la qual la pierna *AC* es perpendicular á las otras dos *CF*, *CG*, con la qual se puede tirar á una pared una perpendicular desde un punto dado fuera de ella.

776 Nos parece del caso declarar aquí el método de *tirar á una pared una linea á plomo desde un punto dado* A, cuya operacion incluye dos casos.

I. *Si fuere la pared perpendicular, ó lo que es lo mis-* 52.
mo, á plomo, arrímesele al punto dado *A* un plomo, esto es, un hilo que tenga pendiente de uno de sus estremos un peso qualquiera, de modo que cuelgue el plomo, es-

Digitized by Google

Fig. tando arrimado á la pared lo mas que se pueda sin tocarla: se pondrá el ojo en tal situacion, que el bramante del plomo oculte el punto *A*: se señalará despues otro punto *B* que le oculte tambien el bramante: tirando una linea por estos puntos, será la vertical que se pide.

777 II. *Si fuese inclinada la pared*, no se la podrá en este caso tirar una vertical; pero sí una linea que será la seccion comun de un plano vertical perpendicular á la pared, que tambien se llama *vertical.* Quando se quisiere tirar esta vertical por un punto dado, se levantará desde este punto una perpendicular á la pared, desde cuyo estremo se dejará colgar el plomo, y se tirará la vertical del mismo modo que en el caso antecedente.

778 Quando ocurra *tirar una linea paralela á otra linea dada*, si se hubiese de egecutar esta operacion en el papel, está dicho en la Geometría Elemental (337) lo que se ha de practicar; bien que suele haber en el estuche de Matemática un instrumento por cuyo medio se traza mas facilmente una linea paralela á otra.

53. 779 Se compone este instrumento de dos *reglas paralelas* A *y* B unidas con dos hojas de alaton *C* y *D* paralelas, por cuyo medio las dos reglas *A* y *B* se pueden arrimar ó apartar la una de la otra, quedando siempre paralelas entre sí. La una de las dos reglas tiene un chaflan ó rebajo para tirar lineas con tinta del mismo modo que con la regla simple. Se reconoce si son exactas las reglas parale-

lelas trazando primero con ellas en un plano dos lineas paralelas *AB*, *CD*: despues se trazarán otras *EF*, *GH*, que corten las dos primeras; y si las porciones de las dos paralelas comprehendidas entre las otras dos paralelas fueren iguales, será señal de que las reglas paralelas están bien construidas (409). Se podrán tirar aún para mayor seguridad otras dos lineas *IK*, *LM*, en las quales se debe verificar lo mismo que en las primeras. Fig. 54.

780 Pero si se hubiese de egecutar esta operacion en el terreno, como *si por el punto dado* A *se hubiera de tirar una paralela á la linea dada* BC, se bajaría una perpendicular *AD*: se levantaría otra perpendicular *EF* igual á *AD*: tirando por los puntos *A* y *F* la linea *AF*, esta sería la paralela. 55.

781 En esta operacion se funda otra que puede ocurrir; es á saber, la de *proseguir una linea recta* AB *mas allá de un obstáculo*, para cuyo fin se levantarán las dos perpendiculares iguales *AC*, *BD*: se tirará la paralela *CF*, en la qual se tomarán mas allá del obstáculo los puntos *E*, *F*, desde los quales se bajarán las perpendiculares *EG*, *FH* iguales á las antecedentes: tirando la linea *GH*, será evidentemente la continuacion de la linea *AB*. 56.

De la Nivelacion.

Como se reduce la nivelacion, segun declararémos, á tirar lineas orizontales, nos parece oportuno declarar aquí el método de egecutar esta operacion.

Pa-

Fig. 782 Para la inteligencia de lo que sobre este punto nos toca declarar, es indispensable saber que la tierra es un cuerpo redondo ó tan parecido á una esfera, que si en algo discrepa de la figura de este sólido, es tan corta la diferencia, que en nada puede alterar las consecuencias que de su perfecta redondez inferirémos respecto de la nivelacion.

783 Bien que son muchas las observaciones de que se infiere que no es plana la tierra, sino curva y aun esférica, nos contentarémos con traer una que está patente á los ojos de todos los hombres. Quando empieza un navio á descubrir una costa, los objetos mas altos son los primeros que divisan los que en él navegan. Si fuera plana la superficie de la tierra, en el mismo instante que desde el navio se vé la torre *B*, se veria tambien todo el terreno
57. adyacente *ABC*. Sin embargo no es así, porque la superficie *DAC* de la tierra se vá bajando mas y mas respecto de la linea orizontal *BD* del navio.

784 Puede, pues, suceder que estén al parecer en una misma linea orizontal *DB* dos puntos *B* y *D*, aunque estén á distancias muy desiguales de la superficie, y por consiguiente del centro *T* de la tierra. Por *linea orizontal* entendemos una linea tirada en un plano que toca la superficie de la mar, ó paralela á dicho plano que llamamos *plano orizontal*; y llamamos *linea vertical* la perpendicular á un plano orizontal.

785 Si es redonda la tierra, no hay duda en que sa-

Digitized by Google

sabiendo quantas varas caben en un grado de uno de sus círculos máximos, que son aquellos cuyo plano pasa por el centro de la tierra (565), se sabrá quántas varas coge su circunferencia; porque multiplicando por 360 el valor de dicho grado, espresará el producto quántas varas entran en la circunferencia del círculo máximo cuyo es. Fig.

786 Se sabe que un grado de un círculo máximo de la tierra contiene 56979 toesas *, de donde sacamos, multiplicando 56979 por 360°; 1.° que en la circunferencia de un círculo máximo de la tierra hay 20512440 toesas; 2.° en su diámetro (504) 6526685; 3.° en el radio 3263342; 4.° en un minuto 950; 5.° en un segundo 16 toesas.

Teniendo presente lo dicho (690) hallarémos, 1.° que en un grado de círculo máximo de la tierra caben 132951 varas castellanas; 2.° en la circunferencia 47862360; 3.° en el diámetro 15228932 $\frac{2}{3}$; 4.° en el radio 7614466 $\frac{1}{3}$; 5.° en un minuto 2216; 6.° en un segundo 37.

787 Todo esto supuesto, se dice que *dos puntos están á nivel* quando están cada uno á igual distancia del centro de la tierra, por lo que *está á nivel una linea* quando está en la superficie de una esfera que tiene el mismo centro que la tierra.

SI

* *A su tiempo daré los motivos por que entre los diferentes valores que se han sacado de un grado de círculo máximo de la tierra, prefiero aqui el valor de 56979 toesas.*

Fig. 788 Si por un punto *D* de la superficie de la tierra
57. se tira una tangente *DB* que será perpendicular (346) al radio *TD* de la tierra, esta linea, que es paralela al orizonte, se llama *linea del nivel aparente*; y si se tira otro radio *TI* continuandole hasta la linea del nivel aparente, la parte *BI* es la *diferencia entre el nivel verdadero* I *y el aparente* B, cuya diferencia es la misma que hay entre el radio *TD* de la tierra y la secante *TB* del arco.

789 Para *conocer la diferencia entre el nivel aparen-*
57. *te y el verdadero de dos puntos* D *y* B, conviene considerar que la distancia á que se puede vér un objeto terrestre, ó que por lo menos la distancia á que observamos en la nivelacion, es siempre tan corta que midiendo esta distancia *DI* en la superficie de la tierra, se puede considerar como igual á la tangente *DB*. Pero hemos visto (477) que la tangente *BD* es media proporcional entre qualquiera secante tirada desde el punto *B*, y la parte esterior *BI* de la misma secante; y por ser muy corto el arco *DI*, podemos mirar la secante que pasa por el punto *B* y el centro *T* de la tierra, como igual al diámetro; esto es, como dupla de *IT*, ó dupla de *DT*: luego será *BI* el quarto término de esta proporcion $2DT : DI :: DI : BI$.

Supongamos, por egemplo, que el valor de *DI*, medida en la superficie de la tierra, sea de 2000 varas ó 6000 pies, por ser el radio de la tierra de $7614466\frac{1}{3}$ varas ó 22843399 pies, hallarémos *BI* haciendo esta proporcion 45686798 pies : 6000 :: 6000 : *BI*; egecu-

cutando el cálculo, sacamos que *BI* vale 0,7880 de pie, Fig.
que vienen á ser 9 pulg. $5\frac{1}{2}$ lineas: quiero decir que entre dos objetos *B* y *D* distantes el uno del otro 2000 varas, y que están en una misma linea orizontal, la diferencia *BI* del nivel ó de distancia al centro de la tierra, es de 9 pulg. $5\frac{1}{2}$ lineas.

790 Despues de calculada una diferencia de nivel como *BI*, se pueden calcular con mas facilidad las que corresponden á una distancia menor, considerando que las distancias *BI*, *bi*, son quasi paralelas é iguales á las lineas *DQ*, *Dq* que son entre sí como (523) los quadrados de las cuerdas ó de los arcos *DI*, *Di*; porque en este caso se pueden tomar promiscuamente las cuerdas por los arcos ó estos por las cuerdas.

En virtud de esto, si quisiera hallar la diferencia *bi* de nivel correspondiente á una distancia de 4000 pies, haria esta proporcion

$(6000)^2 : (4000)^2 :: 9\,\text{p}\ 5\frac{1}{2}\,\text{l} : bi = 4$ pulg. $2\frac{1}{2}$ lin.

791 Supuestos estos principios, para *conocer la diferencia de nivel de los dos puntos* B *y* A *que no están en* 58.
la linea orizontal que pasa por el uno de ellos, se podrá medir con el Grafómetro (mas adelante dirémos qué instrumentos son el grafómetro, y la cadenilla) el ángulo *BCD*, y midiendo con la cadenilla la distancia *CD* ó *CT* sobre el terreno *AVB*, se considerará como rectángulo en *D* el triángulo *CDB*, y se calculará *BD*, á cuyo valor se añadirá la altura *CA* del instrumento, y la diferencia *DT* de ni-

Fig. nivel sacada por el método espresado (789).

Pero como este método supone que se tome con suma exactitud el ángulo *BCD*, y que sea muy exacto el instrumento, es mas seguro buscar la diferencia de nivel entre dos puntos por un camino mas largo, conforme vamos á declarar.

792 Para *saber si una linea de corta estension es orizontal*, se hace uso

1.° Del *Nivel de ayre* que se compone de un tubo
59. lleno de espíritu de vino, en el qual se deja una ampolla de ayre que se manifiesta en medio *C* del tubo, quando está á nivel y en direccion orizontal el instrumento.

60. 793 2.° Del instrumento que llaman *Nivel de Albañil.* Compónese este nivel de un triángulo isósceles sin base, y de un arco de círculo comprehendido entre sus dos lados. Desde el vértice cae una linea perpendicular á la base que vá señalada en el arco del triángulo. En el estremo superior de esta linea se cuelga un plomo, cuyo hilo corresponde exactamente con dicha linea quando está en situacion orizontal la base del instrumento. Determina este nivel mejor que el de ayre la cantidad de la inclinacion de un plano que no sea paralelo al orizonte; porque las divisiones del arco señalan de qué cantidad se aparta el plomo de la vertical.

61. 794 3.° Del nivel *CABD*, llamado *Nivel de agua.* Consiste en un tubo hueco de oja de lata ú otro metal doblado en *A* y *B*. En los dos tubos *AC*, *BD* se introdu-

cen

Digitized by Google

cen otros dos de vidrio *I* y *K*, pegados con betun el uno en *AC*, el otro en *BD*. Debajo y en medio del tubo *AB* hay una virola para colocarle en su pie. Se llena de agua todo el tubo hasta que suba á la altura de 2 ó 3 pulgadas en los dos tubos de vidrio. La linea *CD* que pasa por la superficie del agua en ambos tubos *IA*, *KB*, es una linea orizontal. Fig.

Para hacer uso de este instrumento se necesita otra pieza llamada la *Mira*. Es un carton ú hoja de lata de un pie en quadro al poco mas ó menos, dividido en dos partes iguales por una linea orizontal *MN* que separa la mitad 62.
inferior que está dada de negro, de la parte superior que se deja blanca. Se planta este carton en una regla de modo que sea *MN* perpendicular á la longitud de la regla. Esta se mete y mueve en un rebajo hecho en un estadal *OP* dividido en pies, pulgadas y lineas; haciendo correr la regla por el rebajo, se colocará la linea de mira donde se quiera y convenga.

795. Supongamos ahora que se quiera *averiguar si están á nivel dos puntos* P *y* Q, ó qual de los dos dista 63.
mas del nivel verdadero, y de qué cantidad.

Se planta el instrumento en *N*: el que hace la operacion envia un peon á que plante en *Q*, lo mas perpendicularmente que pueda, un estadal dividido, como se ha dicho, en pies, pulgadas y lineas, que mantiene firme con la mano izquierda, y en la derecha tiene la mira para subirla ó bajarla á lo largo del estadal, segun se le avisare por señas.

El

Digitized by Google

Fig. El que tiene á su cargo hacer la nivelacion, mira orizontalmente por la superficie del agua ácia el estadal, y hace seña al peon para que pare la mira en el punto *L* donde remata el rayo visual *KL*. Hecho esto, mide la altura *QL* que supondrémos de 1 pie 3 pulgadas: se mide la altura *KP* que supondrémos de 4 pies 6 pulgadas: se resta la menor de la mayor, y la diferencia 3 pies 3 pulgadas manifiesta la cantidad de que dista mas del centro de la tierra el un punto que el otro, ó de que está mas elevado uno que otro sobre el orizonte.

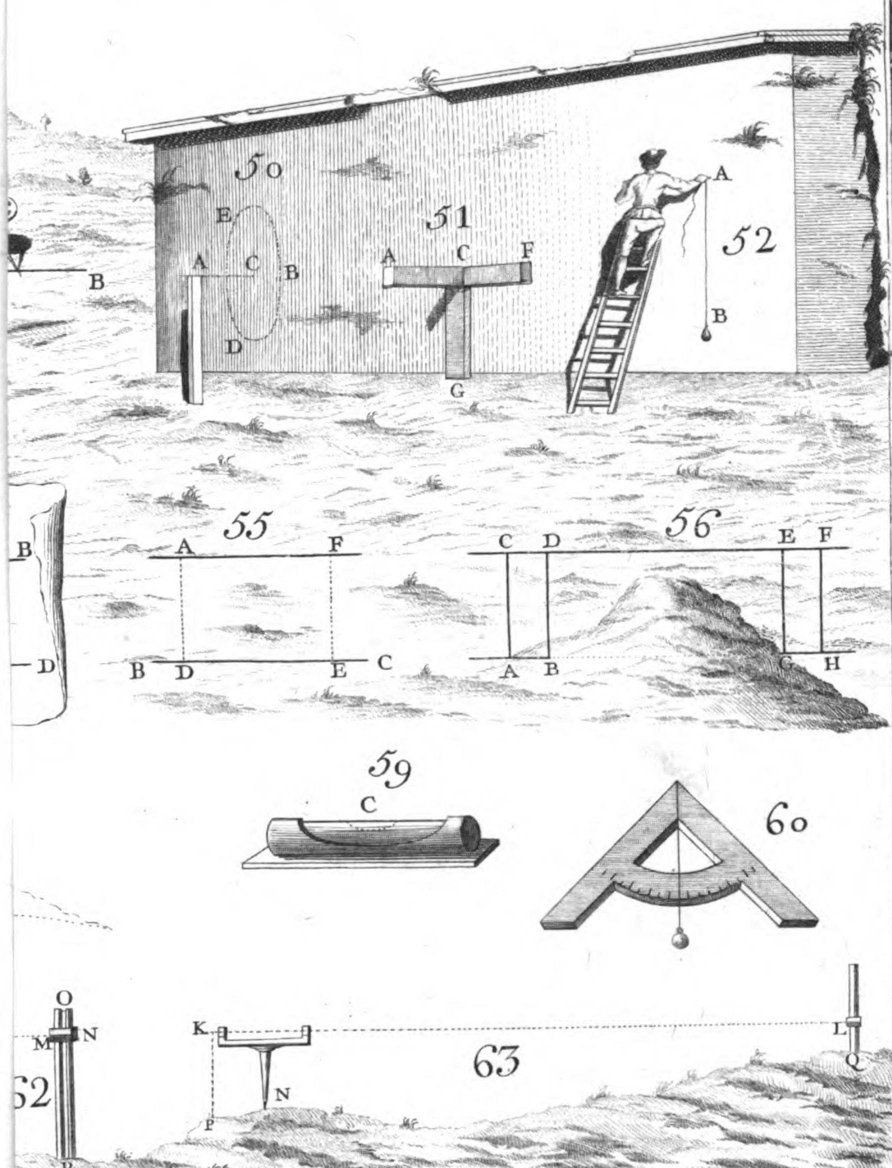
796 Si la distancia entre los dos puntos cuya diferencia de nivel se busca, no pasa de 700 á 750 pies, que es la mayor que con este instrumento se puede coger, no se atiende á la diferencia que puede haber entre el nivel verdadero y el aparente; porque á tan corta distancia se desvía tan poco del nivel verdadero la linea *KL*, que es como nula la diferencia.

797 *Quando es mucha la distancia entre los dos objetos que se lleva ánimo de nivelar*, se repite muchas veces la operacion; pero si no fuese mas que de unos 1400 ó 1500 pies, se puede egecutar de una sola vez plantando el nivel en medio de la distancia que hay entre los dos términos de la nivelacion.

Supongamos, por egemplo, que se hayan de nivelar

64. los dos puntos *A* y *B* que distan uno de otro 1540 pies. Se plantará el nivel en *C*, á la mitad de la distancia *AB* con poca diferencia: se mirará desde *D* á *E*; y supon-

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

pongo que remata el rayo visual en el punto *G*, cuya altura es de 2 pies 4 pulgadas. El que nivela pasará al otro lado para mirar desde *E* á *D*, donde habrá otro peon con otro estadal, y todo lo demas que hemos espresado (794); y supongo que remate el rayo visual en el punto *F*. Se medirá *AF*, que supondrémos de 9 pies 6 pulgadas: se restarán de esta cantidad 2 pies 4 pulgadas que son la altura del punto *G*: la diferencia 7 pies 2 pulgadas manifestará que el punto *A* está mas bajo que *B* de la misma cantidad. Fig.

798 Si los dos puntos *A* y *B*, que se han de nivelar, estuvieran á 5000 pies, por egemplo, el uno del otro; dividiendo 5000 por 1400, el cociente avisaría quántas estaciones se habrian de hacer, ó quántas veces se habria de repetir la operacion. Porque ya que podemos nivelar de una vez dos puntos distantes 1500 pies el uno del otro, el cociente 3 de 5000 partido por 1500 me avisa que con tres estaciones puedo egecutar la operacion. A cuyo fin busco desde luego tres sitios los mas cómodos para tres estaciones: hago plantar de contado un jalon en el punto *C* que viene á estár en medio de la distancia *AB*; y á la distancia de 700 ó 750 pies del punto *A* hago plantar otro jalon en *D*, y hago plantar tambien otro á igual distancia del término *B*, y procuro que estén los tres jalones en una misma linea recta con los dos términos *A* y *B*. 65.

Despues de colocado el nivel en *D*, miro desde *T*

Digitized by Google

Fig. ácia *S*; y en el supuesto de que vá á rematar en el punto *M* el rayo visual, hago medir *MA* que supongo de 8 pies 2 pulgadas, y lo apunto. Miro despues desde *S* ácia *T*, y hago señalar con un lapiz el punto *K* donde vá á parar el rayo visual *SK*. Paso despues á la segunda estacion *C*: envio un peon al punto *G* que está á la mitad de la distancia *CE*, para que tenga alli un estadal hasta concluidas las operaciones de la segunda y tercera estacion. Miro desde *Q* ácia *R*: y suponiendo que vá á parar el rayo visual al punto *L*, hago medir *KL* que supondrémos de 3 pies 6 pulgadas, que se apuntarán: miro despues desde *R* ácia *Q*, y hago que el peon que está en *G*, señale el punto *H* donde remata el rayo visual. Finalmente mando plantar el nivel en la tercera estacion *E*: miro desde *P* ácia *O*; y suponiendo que pára en *I* el rayo visual, mando medir *HI* que supondrémos de 4 pies 3 pulgadas, y se apuntarán: miro despues desde *O* ácia *N*, mando medir *BN* que supondrémos de 1 pie 6 pulgadas, y cuido de que se apunte aparte esta altura.

Concluido todo esto, sumo todas las alturas apuntadas en el libro de memorias; esto es, 8 pies 2 pulg, 3 pies 6 pulg, y 4 pies 3 pulg, que montan 15 pies 11 pulg, de cuya suma se restará la altura *BN* que es de 1 pie 6 pulg; y la resta 14 pies 5 pulg, manifiesta que el punto *B* está mas alto que *A* de igual cantidad.

799 Quando es mucha la distancia entre los dos términos, suelen encontrarse subidas y bajadas que hacen

mas

mas embarazosa la nivelacion. En este caso es preciso apuntar en un libro de memorias todas las subidas en una columna que llamarémos la *primera columna*, y en otra *segunda* las bajadas, conforme vamos á declarar. Fig.

Supongamos que se ofrezca nivelar los dos términos *A* 66.
y *B*. Se plantará el nivel en *D*, distante unos 700 pies de *A* y 3: se mirará á los puntos *E* y *C*, y se apuntará la altura *AC* de 6 pies 4 pulg. en la columna primera, quedando el punto *E* señalado con el lapiz. Se pasará despues el instrumento al punto 4, y se determinarán los puntos *F* y *H*: se medirá la altura *FE* que supondrémos de 3 pies 6 pulg: se apuntarán en la primera columna, y se señalará con el lapiz el punto *H* del estadal 5. Se pasará el instrumento al punto 6, desde donde se determinará el punto *L* que quedará señalado con el lapiz, y el punto *J* para medir la altura *IH* que supondrémos de 4 pies, y los apuntarémos en la primera columna. Se pasará despues al punto 8, desde el qual supongo que no se pueda determinar mas que el punto *M*: se medirá la altura *LM* que supongo de 4 pies 2 pulg. y se apuntarán en la segunda columna por haberse hallado la altura *LM* bajando. Como el punto *O* está mas bajo que *M* de toda la altura *NO* del instrumento que supongo de 4 pies y 6 pulg. apuntaré 4 pies 6 pulg. en la segunda columna. Se plantará un jalon en el punto *O*, se bajará el instrumento al punto 9, que será preciso buscar de modo que el rayo visual *PO* vaya á encontrar el pie de dicho jalon: se determinará despues

Digitized by Google

Fig. el punto *Q*. Se pasará despues el nivel á 11 para determinar los puntos *R*, *T*, y la altura *RQ* que supongo de 3 pies, y 9 pulg. que se apuntarán en la columna primera, por hallarse subiendo esta altura. Se pasará despues al punto 13, desde el qual se determinarán los puntos *V*, *Y*, y la altura *VT* de 3 pies 5 pulg. para apuntarla en la primera columna. Quedará señalado el punto *Y*, y pasando el nivel á 15, se determinarán los puntos *B'*, *Z* y la altura *YZ* de 4 pies 1 pulg. para apuntarla en la primera columna. Se irá despues al punto 17, desde el qual se determinarán los puntos *C'*, *E'*, y la altura *C' B'* de 3 pies 7 pulg. que se apuntarán en la segunda columna. Finalmente se pasará el nivel al punto *B* para determinar la altura *E' F'* de 3 pies 10 pulg. que se deberán apuntar en la segunda columna, igualmente que la altura *G' B* del instrumento, que suele ser de 4 pies 6 pulg.

Los números de la primera columna suman 25 pies 11 pulg. los de la segunda 20 pies 7 pulg. Si restamos la menor de estas dos sumas de la mayor, la resta 4 pies 6 pulg. manifiesta que está el término *A* mas bajo que *B* de 4 pies 6 pulg.

800. Si ofreciéndose egecutar una nivelacion, se hubiesen de hacer muchas estaciones por ser muy empinada la cuesta, sería mucho mejor hacer la operacion cuesta abajo ácia cada uno de los dos términos, empezando por la cumbre, apuntando en la primera columna todas las alturas que se determinaren ácia el un término, y en la segunda todas

las

Digitized by Google

las que se determinaren yendo ácia el otro. Fig.

Supongamos, por egemplo, que habiéndose de averiguar la diferencia de altura de los dos puntos *A* y *B*, haya muchas estaciones que hacer, y por consiguiente que perder mucho tiempo. Se empezará desde el punto *6*, cumbre de la altura, nivelando desde *6* ácia *A*, y apuntando en la primera columna las alturas que salieren: despues se proseguirá nivelando desde *6* ácia *9*, apuntando en la segunda columna las alturas que se hallaren. Se pasará el nivel al punto 15 para nivelar primero ácia *9*, y despues ácia *B*. Se restará la suma de las alturas de la una columna de la suma de las alturas de la otra, y espresará su diferencia la que se busca entre el nivel de los dos términos propuestos. 66.

Esta práctica ahorra mucho tiempo; porque si fueren dos para nivelar, mientras nivela el uno desde *6* ácia *A*, podrá nivelar el otro desde *6* ácia *9*.

Métodos para dividir las lineas.

801 Quanto ocurre practicar para dividir en el papel las lineas rectas en razon dada, queda declarado en la Geometría Elemental: solo nos falta declarar ahora el modo de dividir la circunferencia del círculo, cuya operacion incluye varios casos.

802 I. Para *dividir un círculo en dos partes iguales*, 67.
se tirará un diámetro *AB*: despues se le podrá dividir si se quisiere en quatro, en ocho, en diez y seis &c. partes iguales, dividiendo la semicircunferencia por el medio en

Fig. los puntos *C* y *D*, y despues los quadrantes tambien por el medio en los puntos *E*, *F*, *G*, *H* &c.

68. 803 II. Para *dividirle en seis partes*, se llevará seis veces el radio *AC* sobre la circunferencia en los puntos *B*, *D*, *E*, *F*, *G*; y tomando la mitad de cada uno de estos arcos, estará dividido el círculo en doce partes iguales. De donde se puede inferir lo que se habrá de practicar para dividirle en 24, 48 &c. partes.

804 III. La division del círculo en partes de número impar se funda en su division en partes de número par. El método que para esto vamos á declarar, dá la division de un arco de círculo, por egemplo del quadrante, en un número impar de partes.

Practícase esta division por medio de una curva que llaman *Quadratriz*, cuya descripcion es como se sigue.

Divídase el radio *AB* en un número muy crecido de

69. partes iguales, de suerte que el quadrante *AT* pueda dividirse en el mismo número de partes iguales. Aquí supondrémos que así el radio *AB* como el quadrante están divididos en diez y seis partes iguales. Hecho esto, tírense los radios *BC*, *BD*, *BE*, *BF* &c. y por los puntos G, *H*, *I*, *K* &c. lineas paralelas al semidiámetro *BT*, que cortan los espresados radios en los puntos *L*, *M*, *N*, *O* &c. por los quales se trazará la curva *AS* que saldrá tanto mas exacta quanto mayor fuere el número de partes iguales en que se hubiere dividido asi el radio *BA* como el quadrante.

Si se tiran paralelas *HM*, *KO* mayor que encuentren la

cur-

Digitized by Google

curva en los puntos *M* y *O*, y por estos puntos se tiran Fig.
radios *BD* y *BF*, habrá la misma razon entre el arco *AD* y el arco *DF*, que entre la linea *AH* y la linea *HK*, por la formacion de la curva.

805 Ya se nos hará muy facil dividir un ángulo ó un arco en tres partes iguales; y lo que respecto de este número demostráremos, se deberá entender de otro qualquiera número impar. Propongámonos *dividir el arco ó ángulo* OPQ *en tres partes iguales*. Supondrémos que esté 70.
trazada la curva en un pedazo de cuerno ó de carton muy liso, conforme hemos dicho. Suponiendo tambien que esté la curva con su quadrante de círculo *AC*, hago el ángulo *ABE* igual al ángulo dado, y desde el punto *F*, donde el radio *BE* corta la curva *AD*, tiro la perpendicular *FG* al radio *AB*, y divido la parte *AG* en tantas partes iguales quantas ha de contener el ángulo despues de dividido: en este caso la divido en tres partes iguales en los puntos *H* y *K*, por los quales tiro las paralelas *KL* y *HI* que cortan la curva en los puntos *L* y *I*, por los quales tiro los radios *BM* y *BN* que dividen el arco *AE* en tres partes iguales en los puntos *M* y *N*; porque por la propiedad de la curva *AK* : *AG* : : *AM* : *AE*; y como *AK* es un tercio de *AG*, será el arco *AM* la tercera parte del arco *AE*.

806 Si ocurriese dividir en tres partes iguales un
ángulo obtuso *RST*; como el arco *RVT* no puede caber en 71.
el arco *AC*, se debería dividir en dos partes iguales el án- 72.

 gu-

Digitized by Google

Fig. gulo obtuso para formar el ángulo agudo *RSV* que supon-
70. drémos ser el mismo que el ángulo *ABE* : dividiendo el ángulo agudo en tres partes iguales en los puntos *M* y *N*, se tomará el arco *AN* que por ser duplo de la sexta parte del arco *RVT*, será el tercio del mismo arco *RVT*.

807 Para dividir un círculo en siete partes iguales, se dividirá su quadrante en otras tantas partes : el quádruplo de una de ellas será la séptima parte de toda la circunferencia.

Métodos para formar y medir los ángulos.

Como para medir las lineas suele ser preciso en muchas ocasiones buscar primero el valor de algunos ángulos, declararémos aquí el modo de formarlos y medirlos, y los usos de algunos instrumentos que para esto se han inventado.

808 Quando se han de formar y medir ángulos en el papel, se hace uso de un instrumento llamado *semicírcu-*
72. *lo graduado*, porque es un semicírculo de alaton ó cuerno, dividido en 180°. Quando es muy grande se divide en medios grados y aun en quartos de grado : tiene los grados señalados de diez en diez, y debajo están sus suplementos, á fin de que se pueda contar con igual comodidad empezando por la derecha ó por la izquierda. El centro está señalado con una linea recta, y el otro lado está á modo de chaflan.

Sirve este instrumento para hacer ángulos de un número determinado de grados ; para conocer el valor de un ángulo ; para tirar una linea perpendicular á otra ; y como su

Digitized by Google

su base es una línea recta, puede servir en lugar de regla Fig.
para tirar lineas.

Si el semicírculo fuere de cuerno, como es transparente y delgado, será mas acomodado para conocer el valor de los ángulos y tirar lineas rectas con una punta ó con lapiz; pero está espuesto á torcerse.

809 Supongamos ahora que queramos *sacar el valor del ángulo* EBG por medio del semicírculo graduado. Apli- 73.
carémos el centro del instrumento en el vértice *B* del ángulo propuesto, y su radio *BC* sobre el lado *BE* del ángulo. El arco *CD* comprehendido entre los dos lados del ángulo manifestará de quántos grados es al ángulo *EBG*.

810 Quando ocurra *formar un ángulo igual á un ángulo* BAC *formado por el concurso de dos paredes*; desde 74.
el vértice *A* se medirá una longitud arbitraria *AC* de tres ó quatro varas. Se tomará igual distancia, ó la que se quisiere, desde *A* ácia *B*; se medirá exactamente la linea *BC* y resultará un triángulo *ABC*, cuyos tres lados serán conocidos. Se formará despues otro triángulo *abc*, cuyos lados *ac*, *bc* y *ab* tengan tantas partes de la escala quantas varas ó pies contienen los lados de *ABC*: el ángulo *bac* opuesto al lado *bc* será de igual número de grados que el ángulo *BAC* formado por las dos paredes *AC* y *AB*, y opuesto al lado *BC*.

811 Quando se ofrezca *formar en el terreno un ángulo de un número determinado de grados*, por egemplo de 30°, se buscará la cuerda de 30°, suponiendo que los

dos

Digitized by Google

Fig. dos lados del ángulo sean de 10, de 100, ó de 1000 partes. Si los dos lados del ángulo fuesen de 1000, la cuerda de 30° será 517: si los dos lados fuesen de 100, será la cuerda de 51 $\frac{3}{4}$: finalmente si los dos lados fuesen de 10, la cuerda será de 5 $\frac{1}{6}$; por lo que si se forma un triángulo cuyos tres lados sean 1000, 1000, 517, ó 100, 100, 51 $\frac{3}{4}$, ó 10, 10, 5 $\frac{1}{6}$, este triángulo tendrá un ángulo de 30°.

812 Por lo que mira á la cuerda de un ángulo, se puede hallar de varios modos:

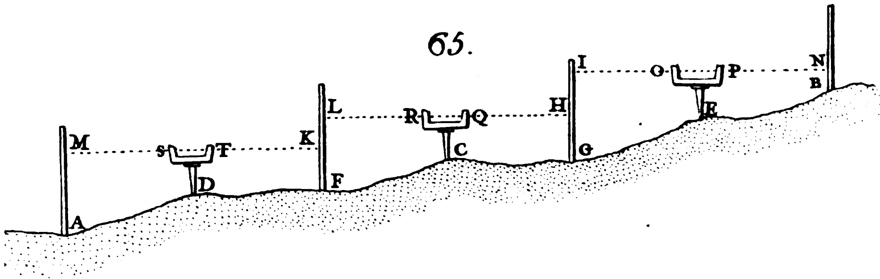
I. Formando en el papel un ángulo *A* de 30°, cuyos
75. lados *AB*, *AC* sean iguales: tirando la cuerda *CB* de este ángulo: dividiendo despues los lados en diez partes iguales, y considerando quántas contiene la cuerda, se hallará que caben 5 $\frac{1}{6}$.

II. Tómese con un compas la cuerda de 60° ó el radio del círculo en la Pantómetra: llévese sobre las partes iguales, se hallará que este radio contiene por lo comun 100 partes. Tómese despues la cuerda de 30°, aplíquese sobre las mismas partes, se hallará que contiene 51 $\frac{3}{4}$: de suerte, que suponiendo los dos lados de un ángulo de 100 partes, la cuerda de 30° será 51 $\frac{3}{4}$.

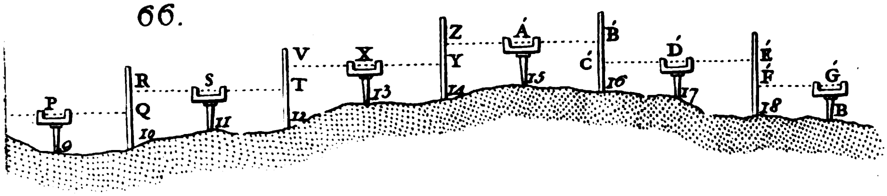
III. Usando de las tablas de los senos que suponen ser el radio de 1000, suprimiendo los dos últimos caracteres, tómese el duplo del seno de 15° para hallar la cuerda de 30°; y como el seno de 15° es de 258, será su duplo 516 la cuerda de 30°.

IV.

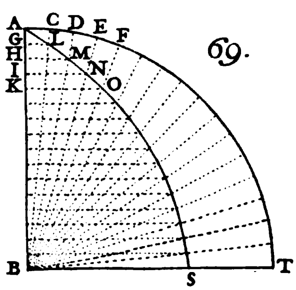
65.



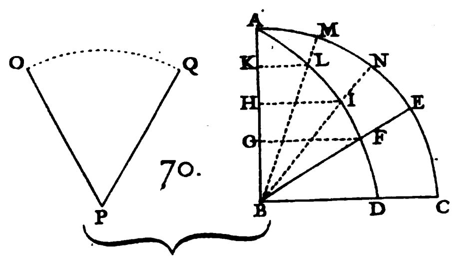
66.

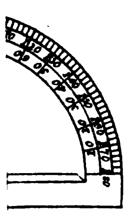


69.

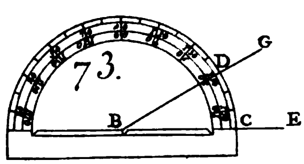


70.

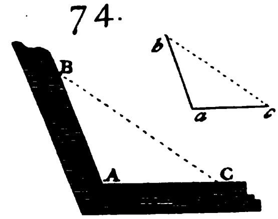




73.



74.



Digitized by Google

IV. Pero como hemos supuesto que los lados del ángulo son de 10, de 100, de 1000 partes, respecto de cuyo número se han hallado las cuerdas: si se pidiesen los números mas pequeños que tuviesen la misma razon, á fin de formar con ellos los mismos ángulos; en este supuesto se deberian partir los números espresados por un mismo número. Suponiendo, por egemplo, que el lado de un ángulo de 30° sea de 1000 partes, y su cuerda 516, se partirán 1000 y 516 por 4: saldrán 250 y 129, que partidos por 5, dan 50 y quasi 26: partiendo todavia por 2, saldrá, con poca diferencia, 25 y 13 que podrán servir para formar el ángulo de 30°, del mismo modo que 1000 y 516. Fig.

813 Si se tratase de *formar un triángulo igual á otro propuesto*, se reduciría toda la operacion á tirar lineas iguales á lineas dadas, y formar ángulos iguales á otros ángulos.

814 El instrumento que sirve para medir ángulos en el terreno se llama *Grafómetro*, y es un semicírculo de alaton con quatro pínulas, dos de las quales *A* y *B* están en los estremos de su diámetro inmobil *AB*, y son por consiguiente inmóbiles: las otras dos pínulas *C* y *D* están en los estremos de una alidada mobil *CD*, por medio de un ege que está en el centro del instrumento. En lugar de las quatro pínulas lleva el grafómetro comunmente dos anteojos de larga vista, de los quales el uno está inmobil sobre el diámetro del instrumento, y el otro sirve de alidada mobil. 76.

Los

Digitized by Google

Fig. Los grados del semicírculo están señalados de dos modos opuestos desde la unidad hasta 180°. En cada estremo de la alidada mobil está señalada la linea diametral con una flor de lis, y sirve para señalar los grados. Al lado de esta linea hay doce divisiones iguales, cada una de las quales vale $\frac{11}{12}$ de grado, esto es 55 minutos, y sirven para distinguir los minutos de 5 en 5, conforme lo declara el egemplo siguiente.

815 Supongamos que señale la linea diametral 1 grado de grado y $\frac{1}{12}$; en este caso la primera de las divisiones de la alidada corresponderá exactamente al grado siguiente, pues $\frac{1}{12}$ mas $\frac{11}{12}$ valen 1.° Si la flor de lis cogiese 2 ó $\frac{3}{12}$, la segunda ó tercera division de la alidada corresponderia al segundo ó tercer grado.

77. 816 I. Para *medir, pues, con el grafómetro el ángulo* BAC, por egemplo, plántese el pie del instrumento en el punto *A*, donde concurren las direcciones de los objetos *B* y *C*: póngase despues á nivel el instrumento, y diríjase el rayo visual *OQ* del anteojo inmobil al uno de los dos objetos como á *C*, antes de apretar el tornillo de la choquezuela: póngase despues el anteojo mobil *MN* fijo en la direccion del otro objeto *B*, y cuéntense los grados comprehendidos entre *NQ*.

Si cogiese la flor de lis algo mas allá del último grado, se mirará entre las divisiones de las pequeñas partes de la alidada quál es la que cae exactamente sobre uno de los grados siguientes. Con esto se sabrá quántos minutos, ademas

Digitized by Google

mas de los grados señalados, coge el ángulo propuesto. Fig.

Despues de apuntado este ángulo, vuélvase á ver, antes de mudar el instrumento, si los dos rayos visuales se dirigen exactamente á las dos lineas que forman el ángulo, y verifíquese si está apuntado correctamente para asegurarse de que no se han movido las alidadas con el sombrero ó por otro accidente.

817 II. Para *medir el ángulo* BAC *formado por dos campanarios distantes y la señal* A, plántense junto á la señal, en la direccion *AB* dos jalones *M* y *N* (758); y en otros dos *O* y *P* en la direccion *AC*: tómese despues el ángulo *PAN* (816). 78.

Es muy socorrido este artificio quando el grafómetro en lugar de llevar anteojos lleva pínulas.

818 III. Si hubiésemos de *medir el ángulo* ABC, *cuyo vértice está en un rio ó en un sitio donde no se puede colocar el instrumento*; sobre qualquiera de las dos bases como *BC* se tomará un punto *m*, desde el qual, imaginando la recta *mA*, se tomará el ángulo *CmA* (816): se medirán despues, por alguno de los métodos que se declararán mas adelante, la pequeña distancia inaccesible *Bm* y el intervalo *AB*, y se hará la analogía siguiente: 79.

El lado *AB*

Es al seno de *BmA* suplemento de *AmC*,

Como el lado pequeño *Bm*

Es al seno de *BAm*, que se restará del ángulo *AmC*, para conocer el ángulo *ABC* que se busca.

IV.

Fig. 819 IV. Quando haya de servir el grafómetro para medir un ángulo que esté en un plano vertical; esto es, un ángulo formado en un plano que pasa por lo que llamamos una linea á plomo; se colocará el plano del instrumento en una situacion vertical por medio de un plomo que está colgado en su centro. Quando el hilo del plomo rasa con el borde del instrumento y corresponde á 90°, está el grafómetro en la situacion que corresponde.

80. Así *para medir el ángulo* BAC *formado por la cuesta* AC *con la orizontal* AB; colóquese el grafómetro al pie de la cuesta en la direccion *AD*, conforme acabamos de decir: levántese despues la alidada mobil hasta que por ella se vea la cabeza del jalon *C* que está en lo alto de la cuesta: el arco *mn* expresará el valor del ángulo *mAn* igual (302) al ángulo *CAB*.

Métodos para la medida de las lineas.

820 Para medir y trazar en el papel líneas que contengan cierto número de partes de una linea determinada, son de muchísimo uso las escalas que tambien se llaman *Pitipies*. Declararémos, pues, antes de pasar adelante, sus tres principales especies, el modo de formarlas, y sus usos.

821 I. Para *hacer la escala que llaman* comun, *cu-*
81. *ya longitud* AB *contenga cien partes*, por egemplo: se dividirá *AB* en 10 partes iguales que representarán decenas: se tomará *AC* igual á una de estas decenas, y se dividirá en

en 10 partes iguales que serán las unidades de la escala : escríbase cero en la division C, desde cuyo punto se empezarán á contar las decenas y las unidades. Fig.

Quando ocurra tomar en esta escala un número determinado de partes , pongo por caso 37 , se pondrá la una punta del compas sobre las decenas en 30 , y la otra sobre las unidades en 7 , y esta abertura cogerá 37 partes.

Si fuesen bastante grandes las unidades que ha de espresar la escala para subdividirlas en otras, como si fuesen varas y las quisiésemos subdividir en pies , se dividirá primero AB en 10 decenas , y cada una de estas en 10 unidades que representarán varas: despues se dividirá la primera vara en tres partes iguales que representarán pies.

822 II. Para *hacer una escala muy exacta sobre una longitud dada* DE : tírese DE en un plano muy igual, como en una lámina de cobre ó en un papel : levántense las perpendiculares iguales AD, BE de la longitud que se quisiere : tírese la AB paralela á DE , y divídanse AB y DE en diez partes iguales : tómense AC y DF cada una iguales á una de estas partes, y divídanse estas lineas en diez partes iguales : júntense las divisiones de AB y DE con lineas rectas CF, 100 100, 200 200 &c. que serán perpendiculares á AB y DE : divídanse las lineas BE y AD cada una en diez partes iguales , y desde una division á otra tírense lineas paralelas á AB. Desde una de las divisiones de AC, por egemplo desde 90, tírese á la inmediata sobre DF que es 100 , una linea recta , y des- 82.

Fig. despues por todas las demas divisiones de *AC* tírense paralelas á dicha primera linea, que serán obliquas á *AC*: señálense sobre las divisiones de *CB* y *FE* 100, 200, 300 &c. y sobre las divisiones de *AC* y *CF* señálense las decenas 10, 20, 30 &c. Finalmente sobre las divisiones de *AD* señálense las unidades 1, 2, 3, 4 &c. y estará hecha la escala.

823 Con esta escala se puede 1.° tomar las partes que se quisiere de la linea *DE* que representarán varas, pies &c. Supongamos que se pidan 54 partes: busco en la linea *AC* la division 50, y en la linea *CF* la division 4. Pongo la una pierna del compas en *K* donde concurren estas dos divisiones, y la otra en 4. El intervalo *K*4 vale las 54 partes que se pidieron.

Los triángulos *CF* 10, *C*4*p* son semejantes por causa de las paralelas que pasan por las divisiones de *AD*: luego como *CF* vale 10 partes, de las quales *C*4 vale 4, valdrá tambien 4*p* quatro partes, diez de las quales componen *F*10. Pero desde *K* á *p* hay 50 partes, por la construccion de la escala: luego *K*4 vale las 54 partes que se pedian.

2.° Saber quántas partes de la linea *AC* vale una linea dada qualquiera. Se tomará esta linea con el compas, poniendo la una pierna en la linea *CF*, y dirigiendo la otra ácia *AD*, para ver en qué transversal cae; y suponiendo que cayga en el punto *K*, será señal de que la linea dada vale 54 partes de *AC*.

3.°

Digitized by Google

824 III. Para *hacer una escala universal, esto es, una figura en la qual se pueda aplicar una linea que se haya de dividir en un número de partes, el que se quisiere*, se puede practicar qualquiera de los dos métodos siguientes: Fig.

1.° Trácese una linea *BC* mayor que qualquiera de las que ocurre comunmente dividir. Fórmese sobre ella un triángulo equilátero *BAC*: divídase la base *BC* en diez partes que representarán decenas: divídase la primera de estas decenas en diez unidades, y tírense desde el vértice *A* lineas rectas á cada una de estas divisiones. 83.

Se puede hacer uso de esta escala universal para hacer otra particular, de la qual sea *EF* la longitud que se ha de dividir en 10 partes. Se tomarán *Ae*, *Af* iguales á *EF*, y se tirará la paralela *ef* que estará dividida como se pide (468).

825 2.° Puede tambien servir el *Angulo de reduccion* que se hace del modo siguiente.

Tírese *AB* indeterminada, en la qual se tomará *AD* de la longitud que se quisiere, y representará una decena: llévese esta parte diez veces sobre la linea *AB*: desde el punto *A* como centro, y con el intervalo *AB* descríbase el arco *BC*: desde el punto *B* como centro, y con el intervalo de 10, 20, 30, 40 &c. partes, descríbanse arcos que dividan el arco *BC*: por el punto *A* y por las divisiones del arco *BC* tírense lineas. 84.

Para manifestar el uso de este ángulo de reduccion supondré que se haya de dividir la linea *GH* en 10 ó en

Digitized by Google

Fig. 100 partes. Tómese *Ag* igual á *GH* : desde el centro *A*, y con el intervalo *GH* descríbase un arco *gb* que estará dividido por los radios en 10 ó en 100 partes. Póngase despues la una punta del compas en *g*, y la otra en una de las divisiones del arco *gb* : esta abertura de compas dará un número determinado de partes iguales de la linea propuesta.

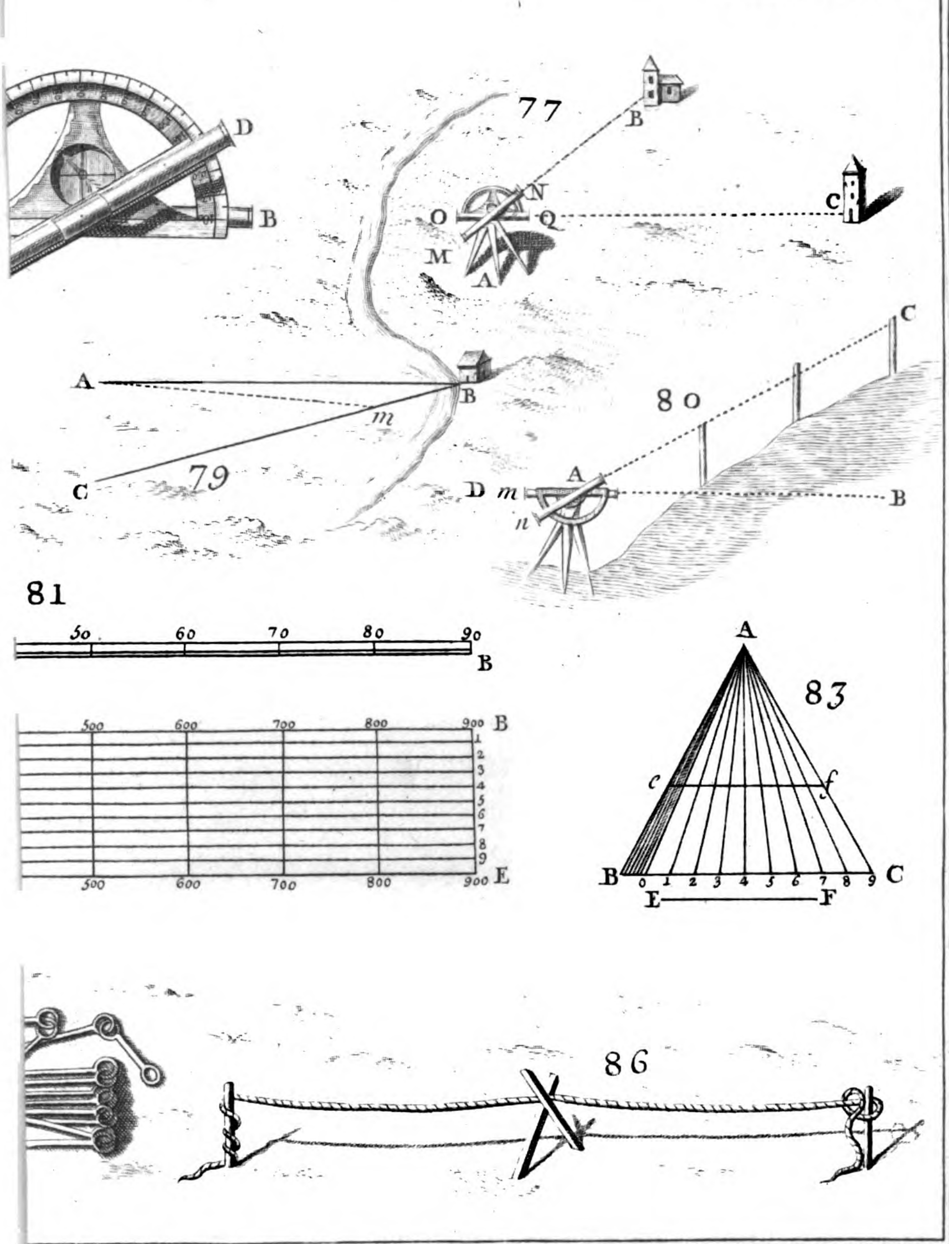
826 Para *medir las lineas en el terreno* puede servir una *Cuerda*; pero como para la exactitud de las medidas es indispensable valerse de una medida invariable, y la cuerda suele encogerse con la humedad, necesita de cierta preparacion para poderla usar con toda confianza. Aconsejan algunos que se tuerzan ácia distintos lados las hebras con que se quiere hacer la cuerda: que se la eche en aceyte hirviendo, y en estando seca se la pase por cera derretida, y por fin se la encere. Se asegura que una cuerda preparada de este modo no se encoge aunque esté un dia entero dentro del agua.

85. 827 Sirve tambien una *cadenilla* compuesta de varios eslabones, cada uno de una medida determinada, pongo por caso de un pie. Se la pueden dar á la cadenilla treinta pies de largo; y bueno será hacerla de alambre que no sea muy grueso, á fin de que no incomode por muy pesada.

A fin de que al tiempo de medir, el peso de la cadena ó de la cuerda no la acorte, se hace uso, para sos-
86. tenerla, del instrumento representado en la fig. 86; porque está averiguado que un hilo de 24 pies de largo, que pe-

Digitized by Google

Plana 482.



Digitized by Google

Digitized by Google

pesa 161$\frac{5}{6}$ granos, y cuyo diámetro es de $\frac{1}{33}$ de pulgada, puesto tirante en direccion orizontal, con una fuerza de 10 libras, pandéa en el medio linea y media. Fig.

828 Una linea accesible en todos sus puntos se míde aplicándola succesivamente la medida de que se quiere usar, sea la cuerda, la cadenilla, ú otra medida qualquiera.

829 *Si estuviese trazada la linea en un plano muy igual*, se tomará con un compas comun ó con el de varas la longitud de la medida, y se aplicará succesivamente la abertura de este compas sobre la linea que se quiere medir.

830 *Si estuviere la linea en el terreno*, y conviniese medirla con exactitud, se juntarán con una cuerda tirante sus dos estremos, ó se plantarán piquetes entre ellos, y se pondrá succesivamente una cuerda desde cada piquete á su inmediato: despues se echará mano de dos medidas iguales, las mas largas que se pueda, que contengan exactamente un número de medidas propuestas, por egemplo 10 pies. Llevarán cada una de estas medidas dos hombres, y se le darán al primero de los que llevaren la segunda medida diez piquetes. Finalmente el Medidor ha de tener un libro de memorias.

Al empezar la operacion, los hombres que llevan la primera medida la aplicarán á lo largo de la cuerda en el estremo de la linea: y los que llevan la segunda, la aplicarán incontinenti á lo largo de la cuerda inmediatamente á continuacion de la primera. El peon que vá delante dejará entre los dos primeros uno de los piquetes que tiene

Fig. en la mano, y le cogerá el que lleva la otra medida. Se proseguirá aplicando de este modo la primera y la segunda medida hasta el otro estremo de la linea; y quando el que llevaba al principio los diez piquetes, hubiese dejado el último, el que lleva el libro de memorias se los volverá todos, y señalará en el libro el número de veces que hubiere vuelto los piquetes, que valen cada una diez veces las medidas ó 100 pies.

Adviértase que para mayor exactitud conviene medir la linea dos ó tres veces; y si las medidas salieren diferentes, se sumarán unas con otras, y se tomará la mitad ó el tercio de la suma, segun que esta fuere de dos ó tres medidas diferentes, y saldrá la longitud de la linea: ó mejor será tomar la menor de todas las medidas, porque suele ser la mas exacta. La razon de esto consiste en que no es posible sacar dos medidas iguales de una misma linea midiéndola con la cadenilla ó la cuerda: porque no es posible que en ambas operaciones tengan los medidores igualmente tirante la medida. De esto resultará que se hallará la linea antes mas larga que mas corta: pues bien se echa de ver que teniendo floja la medida es lo mismo que si se midiera con una medida menor; y como esta ha de caber mas veces en la linea que otra mayor, se evidencia que la medida de una linea que mas se arrima á su verdadero valor, es la que se saca teniendo muy tirante la cuerda ó la cadenilla. Por consiguiente quando se toma dos veces la medida de una misma linea, y salen desiguales

sus

Digitized by Google

sus valores, se ha de preferir el menor. Fig.

831 Una linea puede ser inaccesible ó en toda su longitud, ó en alguna de sus partes. Sea como fuere, se ha de procurar que sea lado de un triángulo, del qual se buscarán las cosas que le puedan determinar; ó considerando solo dicho triángulo ú otros triángulos auxiliares, se conseguirá despues conocer el lado que se busca por uno de los quatro métodos siguientes.

1.° Formando en un sitio accesible una figura igual á la que se hubiese imaginado, para conocer la linea propuesta.

2.° Reduciendo á pequeño la espresada figura.

3.° Resolviendo dichos triángulos por trigonometría.

4.° Resolviendo los mismos triángulos con instrumentos, como con el compas de proporcion &c.

832 Supongamos primero que se ofrezca *medir una linea accesible por uno de sus estremos*, ó que se busque quánto coge la linea *AB* accesible en el punto *B*. 87.

Desde su estremo *B* se tirará una base *BC* en un sitio donde se pueda medir: se imaginará la linea *AC* que concluya el triángulo: midiendo despues la base *BC* y los dos ángulos *B* y *C*, se sacará el valor del lado propuesto *AB* (672).

833 I. Formando en el terreno en un sitio bastante grande, llano y accesible en todas sus partes, el triángulo *abc* igual y semejante al triángulo *ABC*, cuya operacion 88.
es facil, pues son conocidos un lado y dos ángulos de dicho

Digitized by Google

Fig. cho triángulo: se medirá despues el lado ab, que será igual á la linea propuesta AB.

Hay dos modos de abreviar esta operacion:

1.° Trastornando el triángulo del otro lado de la ba-
89. se, esto es, haciendo el ángulo CBa igual al ángulo CBA, y el ángulo BCa igual al ángulo BCA, las dos lineas Ba, Ca se encontrarán en a: midiendo entonces Ba, se hallará el valor de la linea propuesta BA que es igual á Ba.

90. 2.° Tírese una base BC que forme un ángulo recto con la linea propuesta AB: prolónguese AB, y hágase el ángulo BCa igual al ángulo BCA: Ca encontrará AB prolongada en a: midiendo Ba será su valor el mismo que el de la linea AB.

834 II. Se puede hallar el valor de la linea AB, reduciendo el triángulo á pequeño por uno de los métodos siguientes:

91. 1.° Si la linea AB tiene una parte BG accesible, se medirá una base BC que supongo sea de 60 varas. Se tomará Bc á arbitrio, de 15 varas por egemplo: se hará el ángulo Bca igual al ángulo BCA: la linea ca cortará AB en a; (si estuviese a mas allá de la parte accesible BG, se habria de tomar Bc mas corta): despues se medirá Ba que supongo sea de 19 varas, y se hará esta regla de tres:

Como Bc .... 15 V.
Es á BC .... 60 V.
Así Ba .... 19 V.
Es á BA .... 76 V., que será la lon-

longitud de la línea propuesta. Fig.

Para mayor comodidad conviene tomar *Bc* tal que sea el tercio ó el quarto &c. de *BC*, porque *Ba* será entónces el tercio ó el quarto de *BA*.

835 Por el mismo método se puede *medir la altura* AB *de una pared ó de una torre* &c. por medio de la sombra del sol ó de la luna. A cuyo fin se medirá en un plano igual la longitud *BC* de la sombra de la altura *AB*: se plantará en el mismo plano un palo *ba* paralelo á *BA*: se medirá la parte del palo que estuviere fuera de la tierra, y su sombra: y por una regla de tres como la antecedente, se hallará la altura *AB*. 92.

836 Si la linea *BA* no fuese accesible sino en su estremo *B*, se prolongará ácia *a*, y se prolongará tambien la base á arbitrio ácia *c*. Haciendo *Bc*, por egemplo, de 15 varas, hágase el ángulo *Bca* igual al ángulo *BCA*; y conclúyase la operacion como arriba (834). 93.

2.° Tírese en un plano igual, en un papel por egemplo, una linea *bc* que contenga tantas partes de un pitipie, quantas varas contiene *BC*: hágase despues sobre la linea *bc* el triángulo *bca* semejante al propuesto *BCA*: el lado *ba* contendrá tantas partes de la escala quantas varas cogiere *AB*. 94.

837 III. Para hallar *AB* por trigonometría, es preciso conocer la base *BC* que supongo de 60 V, los ángulos *B* de 64° 3′, y *C* de 54°. Entonces el tercer ángulos 95.

Digitized by Google

Fig. gulo *A* que es su suplemento, será de 61° 57′; con cuyos datos se hallará el lado *BA* haciendo la siguiente analogía (671).

El seno del ángulo *A*
Es al seno del ángulo *C*,
Como la base *BC*
Es al lado *AB* que se busca.

96. Si se pudiese medir una parte *BG* de la linea que se ha de medir, y fuese por egemplo de 15 varas, tómese la base *BC* que forme con *BA* un ángulo recto, é imagínense las lineas *CA*, *CG*: mídanse los ángulos *ACB*, *GCB*: tomando despues *BC* por el radio, será *BG* la tangente del ángulo *GCB*, y *BA* la del ángulo *ACB* (667). Se hallará el valor del lado *BA* por esta analogía:

La tangente del ángulo *GCB*	12°
Es á la tangente del ángulo *ACB* ...	37° 56′
Como la parte *BG*	15 V.
Es á toda la linea qne se busca *BA* ..	$47\frac{5}{11}$ V.

97. 838 *Si la linea que se hubiese de medir fuese una altura* AB, se plantará el grafómetro en *D* á cierta distancia del edificio: se medirá la distancia *CD*: se colocará el grafómetro de modo que su plan esté vertical, y se dirija ácia el ege *AC* de la altura, y que su diámetro fijo *HF* esté orizontal: lo que se verificará por lo dicho (819). Se pondrá el diámetro mobil en tal situacion que por las pínulas ó el anteojo que lleva, se vea la cumbre *A* del edificio. Se mirará despues en el instrumento quantos gra-

dos

Digitized by Google

dos coge el ángulo *FEG*, y los mismos cogerá su opuesto al vértice *AEB*. Fig.

Sentado esto, como la altura *AC* del edificio es perpendicular al orizonte, será perpendicular á *BE*: por lo que resulta un triángulo rectángulo *ABE*, en el qual son conocidos el ángulo recto, el ángulo *AEB*, y el lado *BE* igual á la distancia *CD* que se midió. Se buscará el lado *AB* por lo dicho (665), y añadiéndole la altura *DE* del instrumento, saldrá la del edificio *AC*.

839 Acerca de este modo de medir las alturas se nos ofrece prevenir que conviene hacer la operacion á una distancia mediana de dichas alturas, á fin de que el error que se comete indispensablemente al tomar el ángulo de la altura, haciéndole ó mayor ó menor de lo que es en la realidad, sea el menor que se pueda, y no dé muy errada la medida que se busca. Supongamos por egemplo, que se haya de medir la altura *AC*. Si observando desde 98.
el punto *D*, en vez de tomar el ángulo *ADC* qual es en la realidad, se toma el ángulo *FDC* algo menor, es patente que se nos hará la altura *AC* menor de la cantidad *FA* que viene á ser mas de la quarta parte; pero si se toma el ángulo de la altura en el punto *B*, y en vez de tomar el ángulo *ABC* que es el verdadero, se padece la misma equivocacion que antes al tomar el ángulo *EBC*, de suerte que sea el ángulo *EBA* igual al ángulo *FDA*; es evidente que este error, aunque igual al primero, no disminuirá la altura *AC* sino de la cantidad *EA* que es mu-

Digitized by Google

Fig. mucho menor que *FA*. Lo propio sucedería si el que hace la operacion se arrimase mucho á la altura que se propone medir. Por este motivo ha de haber alguna proporcion entre la distancia á que está el práctico del objeto, y la altura del mismo objeto, cuya distancia ha de ser igual con poca diferencia á la misma altura, y se determina con tomar un ángulo de altura de 45°.

96. 840 IV. Si se quisiese hallar el valor de *AB* por la Pantómetra, una vez que en el triángulo *ABC* fueren conocidos un lado y dos ángulos, se practicará lo que digimos antes (722).

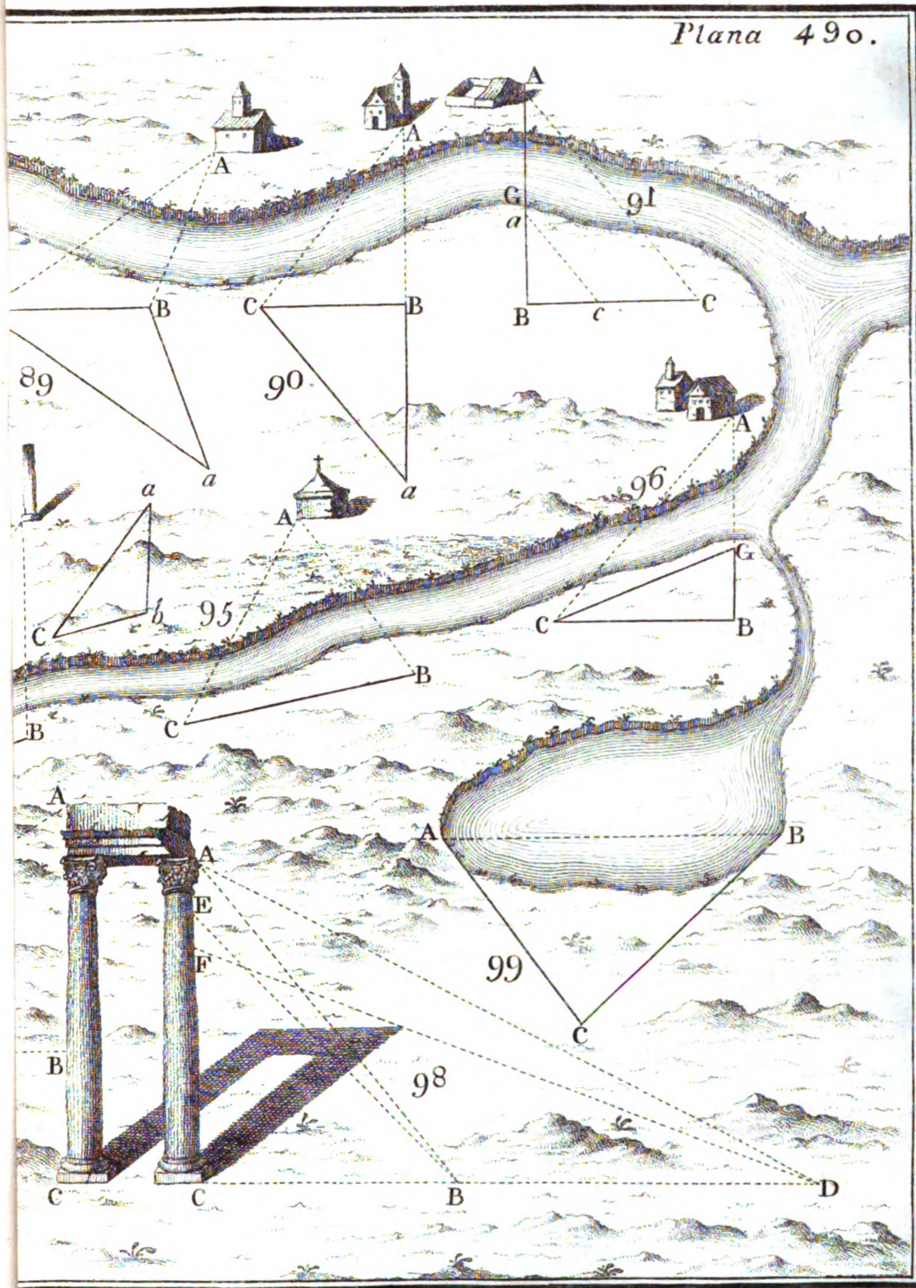
841 En orden á lo dicho (832 y sig.) con-
95. viene prevenir que quando el ángulo *ABC* que forma la base con la linea propuesta, es determinado, se debe tirar la base *BC* igual, quanto se pueda, á la linea *AB*; ó, lo que es lo mismo, conviene apartar tanto el punto *C*, que el ángulo *BCA* sea la mitad del suplemento del ángulo *B*.

Porque si el ángulo *C* es la mitad del suplemento del ángulo *B*, será igual al ángulo *A*: luego en el triángulo *ABC* serán iguales los lados *AB*, *BC* (403), y por consiguiente lo mismo será medir *CB* que *BA*.

99. 842 *Si la linea fuere accesible por sus estremos qual suponemos la linea* AB, se tomará un punto *C* desde el qual se puedan tirar dos bases *CA*, *CB*. En esta operacion pueden ocurrir tres casos.

843 I. Si se pueden medir los ángulos *B* y *C* y la ba-

Plana 490.



Digitized by Google

Digitized by Google

base BC, se hallará el lado AB por lo dicho (672). Fig.

844 II. Si se puede medir el ángulo C, y las bases CB y CA, se hallará el lado AB por uno de los tres métodos siguientes. 100.

1.° Trasladando el triángulo en un sitio donde se pueda medir, lo que se egecuta de varios modos: 1.° trasladándole entero en abc : 2.° dándole un lado BC por base comun con el primer triángulo: 3.° continuando los lados BC, AC mas allá del vértice. Este último medio es el mas acomodado para el que tiene á mano algun instrumento con que medir los ángulos. 101. 102. 103.

2.° Reduciendo á pequeño el triángulo ABC, y esto se puede practicar de dos modos: 1.° tomando en los lados del triángulo ACB las partes Ca, Cb proporcionales á los lados CA, CB, de modo que sean, por egemplo, su mitad. Para mayor exactitud se tomarán estas partes las mayores que se pueda, y en lugar de tomarlas en los lados CA, CB, se pueden tomar en sus prolongaciones Ca, Cb: 2.° reduciendo el triángulo ABC á otro abc por medio de un pitipie. 104.

3.° Por trigonometría, considerando que en el triángulo ABC los lados CA, CB, y el ángulo C que comprehenden, son conocidos (677). 100.

845 III. Si no fuese posible hallar un punto C desde el qual se puedan vér los dos estremos A y B de la linea propuesta; escójanse dos puntos C y D, de suerte que se puedan medir los tres lados BC, CD y DA, y los ángu- 105.

Fig. gulos *C* y *D* (es util formarlos rectos): resultará un quadrilátero *ABCD*, cuyo lado *AB* se hallará por uno de los métodos arriba dichos; esto es

1.° Trasladándole

2.° Reduciéndole á pequeño

106. 3.° Por trigonometría, tirando las díagonales *BD*, *CA*, y considerando que en el triángulo *ADC*, los lados *AD*, *DC*, y el ángulo *D* que forman, son conocidos: luego será facil conocer el lado *CA* (677), y el ángulo *ACD* que se restará del ángulo *DCB*, y resultará el ángulo *ACB*: despues en el triángulo *ACB* serán conocidos los lados *AC*, *CB*, y el ángulo que forman *ACB*: luego se hallará (677) con facilidad el lado *AB*.

107. Si los ángulos *C* y *D* valiesen juntos dos rectos, esto es, si fuesen paralelas las dos lineas *CA*, *BD* (334): del lado mayor *CA* réstese *CE* igual á *BD*, resultará el triángulo *AEB*, en el qual serán conocidos los dos lados *AE*, *EB*, y el ángulo *AEB* que es igual al ángulo *C*: luego se podrá hallar (677) el lado propuesto *AB*.

Sirve esta operacion para medir lo ancho de una laguna, de una montaña, de un bosque &c.

108. 846 Pero *si fuese totalmente inaccesible la linea que se ha de medir*, qual suponemos la linea *AB* á la qual no es posible acercarse: se medirá una base *CD* que sea con poca diferencia, paralela é igual á la linea propuesta *AB*: por los estremos de esta base imagínense lineas tiradas á los estremos de la *AB*: mídanse los ángulos en *C* y en *D*.

He-

Digitized by Google

Hecho esto se hallará la linea *AB* por uno de los quatro métodos arriba declarados. Fig.

847 *Si desde el estremo* C *de la base no se pueden* 109.
vér los dos estremos de la linea propuesta AB, tírese *CE* de modo que desde *E* se puedan vér los dos puntos *C* y *D*: imagínense las líneas *EA*, *EB*, *ED*, *DA*, *DB*, *CA* y *CB*: mídanse los ángulos en *E* y *D*, y la base *ED*: se hallará despues por uno de los métodos declarados la linea *AB*.

848 Adviértase que en la eleccion de los puntos *D*, *C*, *E* se debe huir de formar triángulos, cuyos ángulos sean muy agudos, particularmente los que tienen sus vértices en los puntos *A* y *B* de la linea propuesta.

Sirve esta operacion para medir las lineas que están al otro lado de un rio, de un precipicio, y la distancia de dos sitios apartados el uno del otro como de dos campanarios: sirve tambien de principio para levantar el mapa de un pais.

849 Para *medir la cuesta* AD *de una montaña inac-* 110.
cesible, se medirán los ángulos *MBA*, *BMA*, y el lado *BM* del triángulo *BAM*, y será conocido el tercer ángulo *MAB*. Despues diré (671) sen *MAB* : *BM* :: sen *B* : *MA*, y conoceré el lado *AM* del triángulo *MAD*, y el ángulo *DMA* suplemento de *AMB*. Se tomará despues una base *MN* que se pueda medir: sacando su valor y el de los ángulos *DMN*, *MND*, serán conocidos en el triángulo *MND* un lado *MN*, y los dos ángulos adyacentes: será por lo mismo conocido el tercer ángulo, y será

fa-

Fig. facil hallar el valor del lado *MD*. Luego conocerémos en el triángulo *AMD* dos lados, y el ángulo *AMD* que forman. Será, pues, facil hallar (677) los demás ángulos del mismo triángulo, y por consiguiente el tercer lado ó la inclinacion *AD* de la montaña.

850 Si quisiésemos *medir la altura* AP *de la misma montaña*; despues de haber sacado, por lo que acabamos de decir, el valor del lado *MA*, y del ángulo *AMP*, conocerémos en el triángulo rectángulo *AMP* la hypotenusa, y el uno de los ángulos agudos, y por consiguiente el otro ángulo. Dirémos, pues (664) *R* : sen *AMP* : : *AM* : *AP*, y espresará este quarto término el valor de la altura *AP*. Para *sacar la distancia orizontal entre el punto* M *y el punto* P *del orizonte al qual corresponde la cumbre* A *de la montaña*, diríamos : *R* : sen *MAP* : : *MA* : *MP*.

De las Figuras.

851 Acerca de las figuras se puede offrecer 1.° trazarlas : 2.° transformarlas : 3.° dividirlas.

El fin principal para que suelen trazarse las figuras, se encamina á trazar una figura igual ó semejante á otra, cuya operacion es la misma que levantar un plano quando está en el terreno la figura que se busca. Porque como no es posible formar en el papel una figura igual á una casa, á una huerta, á una provincia, para enterarse de sus dimensiones han acudido los prácticos al artificio de imitar en pequeño las figuras cuyas dimensiones se quieren espresar.

Digitized by Google

sar. Siendo la figura pequeña semejante á la propuesta, se dá noticia cabal de los ángulos y dimensiones de la primera, en virtud de las condiciones (479) en que estriva la semejanza de las figuras. Fig.

En el caso de ser pequeña la figura propuesta como quando está trazada en el papel, puede ocurrir trazar otra que la sea igual, cuya operacion se egecuta de varios modos.

852 I. Si fuese rectilinea la figura, y poco complicada como *ABCDE*, se tirará la linea *ab* igual á *AB* 111.
que llamarémos *base* de la figura: se buscará el punto *c* que esté á la misma distancia de los estremos de *ab*, que *C* de los de *AB*; del mismo modo se buscarán los demás puntos *d* y *e* respecto de los estremos *a* y *b*, ó de otra qualquiera linea, como *be*.

Para asegurar el acierto de esta operacion conviene prevenir 1.° que se debe tomar por base la linea mayor *AB* de todas las de la figura. Si todas las lineas fuesen muy cortas, se debería tirar dentro de la figura, segun su mayor dimension, una linea recta como *EB*, para que sirva de base.

2.° Si alguno de los puntos cuya posicion se busca estuviera tan distante de la base, ó tan á un lado respecto de ella, que las dos lineas tiradas desde dicho punto á los estremos de la base formáran un ángulo ó muy agudo, ó muy obtuso, se buscaría su posicion desde un punto que fuese el vértice de un ángulo que se acercase mucho á un án-

Digitized by Google

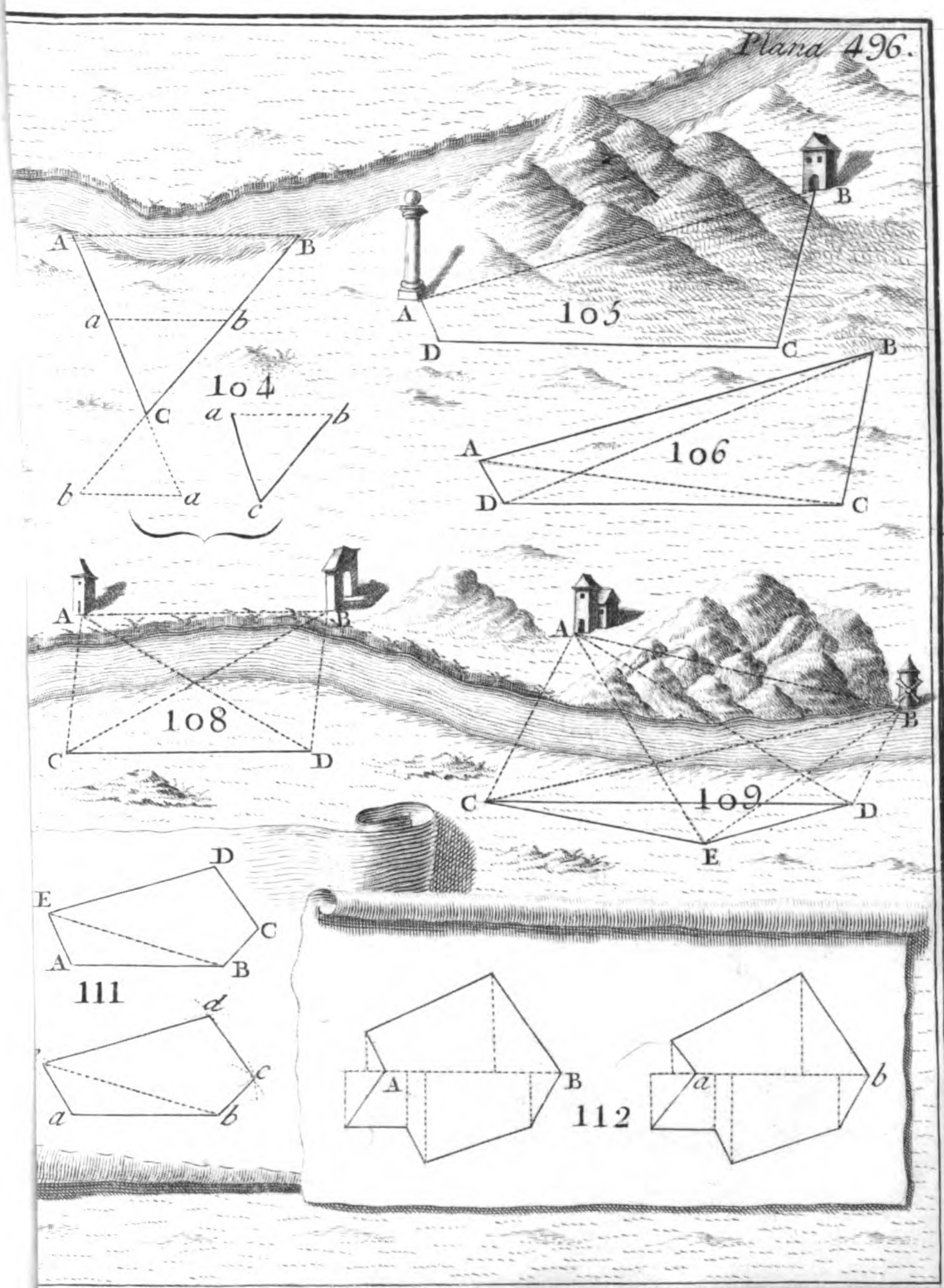
Fig. ángulo recto: tirando desde este punto al uno de los estremos de la base una linea recta, esta serviria de base para hallar los puntos que eran los vértices de ángulos muy agudos ú obtusos respecto de la primera base.

3.° Si fuere irregular la figura y bastase señalar la posicion de algunos puntos principales, y describir lo demás á ojo; en este caso se deberá tirar una linea que pase por el mayor número posible de estos puntos: esta servirá de base para determinar la posicion de los demás.

112. 853 II. Se puede tirar una linea *AB* al través de la figura segun su mayor dimension, y que pase por muchos de los puntos cuya posicion se quisiere señalar: esta linea se llamará tambien *base*. Desde cada punto principal de la figura se bajarán perpendiculares á la base: se tirará despues separadamente una base indefinita *ab*, en la qual se señalarán las distancias de las perpendiculares, y á uno y otro lado se levantarán perpendiculares iguales á las de la figura propuesta, con lo que quedará señalada la situacion de todos los puntos que determinan la figura igual que se busca.

113. Si las perpendiculares fuesen muy largas, se deberian, para no incurrir en alguna equivocacion, tirar en la figura dada dos lineas *AB*, *CD* exactamente perpendiculares la una á la otra, las quales servirian de base para señalar la posicion de los puntos que les fuesen mas inmedia-
114. tos; ó se deberian tomar tres puntos *A*, *B*, *C*, distantes los unos de los otros lo mas que se pudiere, y en tal po-

si-



Digitized by Google

Digitized by Google

sicion que el triángulo que resultáre de las lineas tiradas Fig.
desde el uno al otro, se acerque lo mas que se pueda al equilátero, para escusar ángulos muy agudos. Las lineas *AB*, *AC*, *BC* servirán de bases á las quales se tirarán desde los puntos *D*, *E*, *F* &c. que tienen mas inmediatos las perpendiculares *DD*, *EE*, *FF* &c. Despues se formará otro triángulo *abc* igual al precedente *ABC*, respecto de cuyos lados se señalarán las distancias de las perpendiculares, conforme se hizo antes respecto de las lineas que sirven de bases.

854 III. Describase al rededor de la figura dada
una quadrícula, esto es, tírese una linea *AB* paralela á 115.
la dimension mas larga de la figura, y que pase por el punto que mas saliere: tírese otra linea *AC* que le sea perpendicular, y que pase tambien por el punto de la figura que mas saliere ácia ella: aplíquense succesivamente sobre la linea *AB* partes iguales de la magnitud que se quisiere: aplíquense las mismas sobre *AC*: tómese sobre *AB* el punto *B* inmediatamente fuera de lo ancho de la figura, y el punto *C* mas allá de su altura: acábese el rectángulo en el qual se dividirán los dos lados opuestos del mismo modo que los primeros, tirando lineas paralelas desde las divisiones del uno á su opuesto: este rectángulo dividido en quadros se llamará *quadrícula*.

Quando se quisiere hacer, por medio de esta quadrícula, una figura igual á otra propuesta, descríbase otra quadrícula *abcd* igual á la primera: señálense despues, si fue-

Digitized by Google

Fig. re un mapa la figura que se ha de copiar, los rios, las costas, las ciudades &c. en los puntos de los quadrados correspondientes á los de la figura propuesta. Hecho esto, será facil concluir el dibujo.

Repárese 1.° que para sacar la figura con mas exactitud, conviene que sean pequeños los quadros, lo que se egecutará señalando con lineas gruesas *EF*, *GH* &c. quadros grandes cuyos lados estarán divididos en dos, en tres, en cinco ó en diez partes iguales, mas ó menos segun la exactitud con que se quiere sacar el dibujo, cuyas lineas formarán quadros pequeños; ó se egecutará dividiendo estos quadros grandes, á lo menos los que fuere menester, en quadros pequeños por medio de diagonales, y estos por medio de nuevas diagonales. De este método usan los Dibujantes.

2.° Que para no echar á perder el dibujo original, se puede hacer la quadrícula con hebras de hilo ó seda que se aplican sobre la figura dada, haciendo una quadrícula igual para la figura que se quiere sacar.

855 IV. Se puede sacar tambien una figura igual á otra picándola ó pasándola, y esto se egecuta de varios modos.

1.° Aplíquese el papel en que está formada la figura sobre otra hoja de papel, de suerte que esté muy firme: despues se pica la figura con un alfiler muy sutil en los puntos que sirven para determinarla: señalados estos puntos, será facil sacar la figura.

2.° Píquense con un alfiler los puntos principales de la figura propuesta, y aplíquese la hoja de papel en que está trazazada sobre la hoja en que se quiere sacar el dibujo: tómese un cisquero, esto es, un pedazo de lienzo que se ata por las puntas despues de haber metido dentro de él un poco de carbon molido, y dese con él sobre todos los puntos picados de la figura (esto se llama *estarcir*): quitando la hoja picada, se hallará en la de abajo la figura formada con el cisquero: despues se señalan estos puntos con tinta ó otra cosa que permanezca. Fig.

3.° Tómese una hoja de papel teñida de algun color que se quite con facilidad, como lapiz colorado ó negro, ó con lapiz-plomo &c: aplíquese esta hoja teñida sobre la hoja en que se quiere sacar el dibujo: póngase sobre estas dos hojas la que contiene la figura propuesta, y pásese por los perfiles de esta una punta roma con alguna fuerza, y saldrá calcada la figura sobre la tercera hoja.

4.° Aplíquese la figura dada á un cristal de ventana, detrás de la qual haya mucha luz (se supone formada la figura en un papel muy transparente): aplíquese sobre esta hoja otra de papel blanco, sobre la qual se señalarán los perfiles de la figura propuesta que se verán al través del papel: esta práctica suele ser comun para copiar dibujos de fortificacion, particularmente quando no se quiere echar á perder el original.

5.° Tómese una hoja de papel encerado, que se hace ó bien dándole con una mezcla de cera y trementina, ó bien con aguarrás y barniz de aguarrás: aplíquese la hoja encerada sobre la figura propuesta: síganse con tinta los perfiles de la figura que se verán al través del papel en-

Fig. cerado, y que se señalarán despues en otro papel limpio practicando alguno de los métodos arriba propuestos. Conviene que el papel encerado esté muy seco, porque no estándolo, echaría á perder el dibujo sobre que se le aplicára.

856 Veamos ahora cómo se puede *hacer una figura semejante á una figura dada.* Para esta operacion sirven los mismos métodos que para hacer una figura igual á otra, buscando puntos que correspondan á los de la figura dada. Como estos puntos se hallan por ángulos y por lineas se han de hacer siempre los ángulos en la figura que se busca, iguales á los de la figura dada; pero se han de hacer las lineas de la segunda proporcionales á las de la primera; lo que se conseguirá por alguno de los métodos siguientes.

I. Fórmense dos escalas la una para la figura dada, y la otra para la figura que se ha de trazar: búsquese con la escala de la figura dada el valor de las lineas
116. que sirven para determinar dicha figura: por egemplo si es un polygono, sáquese el valor del radio *AC*, y el del lado *AF*: tírense perpendiculares desde los ángulos de la figura sobre *AF* &c: hágase lo propio respecto de los demás lados del polygono propuesto. Tírese despues una linea *af* que tenga tantas partes de la segunda escala quantas contiene el lado *AF* de la primera, y conclúyase la descripcion del polygono *abdef* con las mismas circunstancias que determinan el primero.

II.

II. Hágase una quadrícula *ABCD* al rededor de la figura dada, y hágase otra semejante para la figura que se quiere formar: colóquense en la segunda quadrícula los puntos que determinan la figura que será facil concluir despues. Fig. 117.

Este método es el mas usado para la reduccion de los mapas, planos &c.

857 Trazar una figura semejante á otra es, segun llevamos dicho (851), lo propio que levantar el plano de un terreno. Consiste esta operacion en determinar en el papel puntos que estén colocados los unos respecto de los otros, del mismo modo que lo están en el terreno los unos respecto de los otros, los objetos que dichos puntos han de representar. Supone el que levanta un plan que todos los objetos cuya situacion se ha de determinar, están en un mismo plano orizontal; pero si no lo estuviesen, de modo que las operaciones que se hubiesen egecutado para determinar las situaciones respectivas de los objetos, no se hubiesen practicado todas en un mismo plano orizontal, á no ser que fuese muy corta la diferencia, convendria, antes de trazar el plan, reducir dichas observaciones á lo que hubieran sido, si se hubiesen hecho en un plano orizontal. Declararémos primero lo que conviene practicar quando se han hecho las operaciones ó se han reducido á un plano orizontal: despues se declarará cómo se hace esta reduccion.

858 Sean, pues, *A,B,C,D,E,F,G,H,I,K* muchos 118.

Digitized by Google

Fig. objetos cuya posicion respectiva se quiere representar en
118. un plan.

Se dibujarán toscamente dichos objetos en un papel, dándoles las situaciones que á ojo parezca que tienen; á cuyo fin el que levántare el plan tendrá que ir á los diferentes sitios donde conviniere, para formar algun juicio de todos los objetos propuestos. Este primer dibujo, que se llama *borrador*, servirá para señalar las diferentes medidas que se tomarán en el discurso de las operaciones.

Se medirá una base AB, cuya distancia no sea muy desproporcionada con la distancia de los objetos mas remotos que desde sus estremos se pueden vér, y que sea tal al mismo tiempo, que se pueda vér desde sus estremos el mayor número de objetos que posible sea: se medirán con el grafómetro en el punto A los ángulos EAB, FAB, GAB, CAB, DAB que forman en el punto A con la base AB, las lineas que se imaginarán tiradas desde dicho punto á los objetos E, F, G, C, D que segun suponemos, se pueden ver desde los estremos A y B de la base: se medirán del mismo modo en el punto B los ángulos EBA, FBA, GBA, CBA, DBA que forman en dicho punto con la linea AB, las lineas que se imaginarán tiradas desde dicho punto B á los mismos objetos que antes.

Si algunos objetos, como H, I, no se pudiesen ver desde los estremos A y B, será menester pasar á dos de los puntos E y F observados antes, desde los quales se pue-

Digitized by Google

puedan ver los dos objetos *H* y *I* : se considerará *EF* Fig.
como una base , y se medirán los ángulos *HEF* , *IEF*, *HFE* , *IFE* que formarán con esta nueva base las lineas que irian desde sus estremos á los dos objetos *H* y *I*. Finalmente, si algun otro objeto como *K* no se hubiese podido vér ni desde los estremos de *AB*, ni desde los de *EF*, se tomará por base otra linea como *FG* que vá desde uno de los puntos observados á otro , y se medirán del mismo modo en sus dos estremos los ángulos *KFG*, *KGF*.

Sentado esto , en los triángulos *ACB* , *ADB* , *AEB*, *AFB* , *AGB* conocemos el lado *AB* , y los dos ángulos adyacentes : luego será facil calcular (672) los otros dos lados.

Por lo que mira á los triángulos *HEF* , *IEF* , como no hemos medido sino los ángulos sobre *EF*, se calculará desde luego *EF* por medio del triángulo *EAF* en el qual se conocen el ángulo *EAF* , diferencia de los dos ángulos observados *EAB* , *FAB* , y los lados *AE* , *AF* determinados por el cálculo antecedente : será , pues , facil hallar el valor de *EF* , en virtud de lo dicho (677). Hecho esto , en cada uno de los triángulos *HEF* , *IEF* conocerémos el lado *EF* , y los dos ángulos adyacentes : se calcularán los otros dos lados del mismo modo que los primeros ; y lo mismo se practicará respecto del triángulo *KFG*.

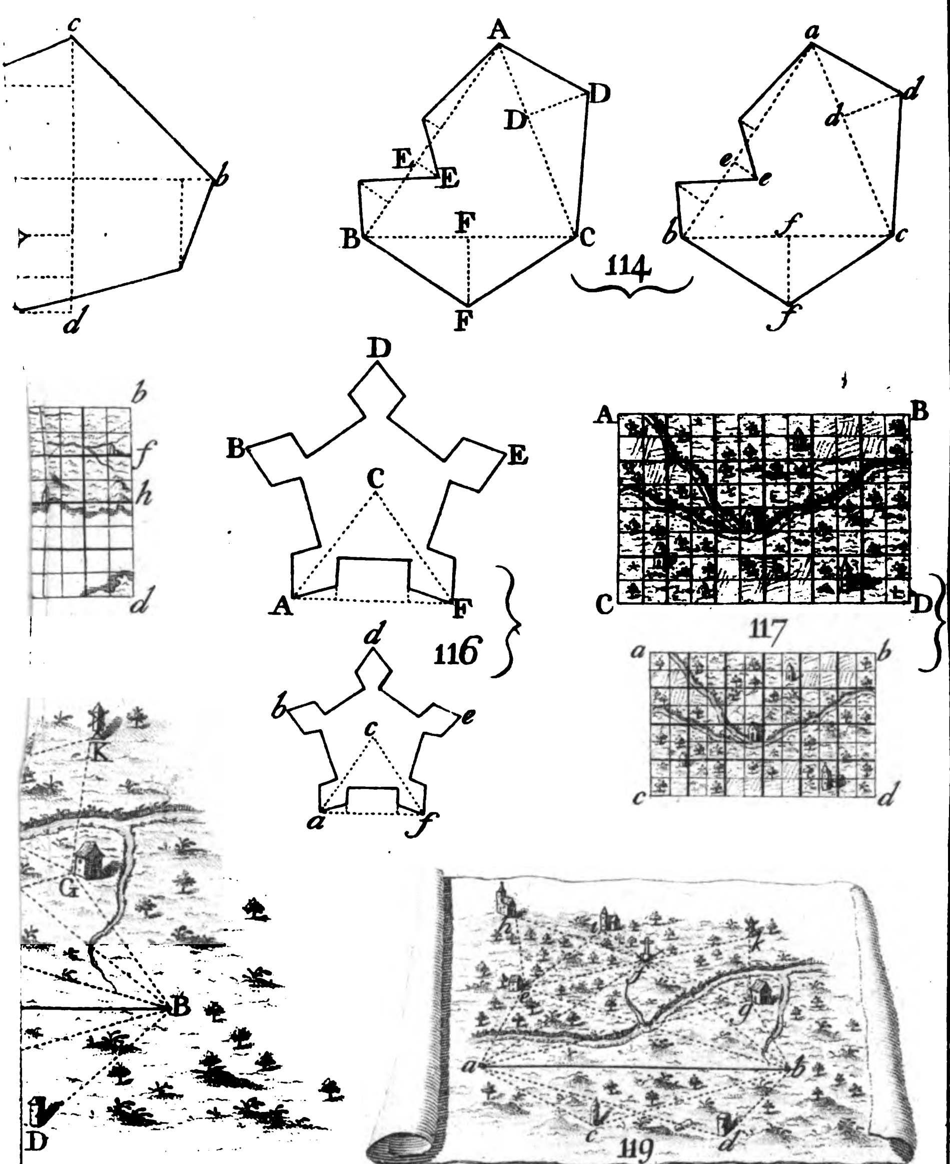
Despues de egecutados estos cálculos se tirará en el papel una linea *ab* , dándola tantas partes de la escala que 119.

 ha

Digitized by Google

Fig. ha de determinar el tamaño del plan, quantas varas ó pies tuviere *AB*: despues para determinar qualquiera de los puntos que se han podido vér desde los estremos *A* y *B* de la base, el punto *E* por egemplo, se tomarán en la escala tantas partes quantas varas ó pies tuviere *AE* en virtud del cálculo, y desde el punto *a* como centro; y con un radio *ae* igual á dicho número de partes, se trazará un arco. Se tomarán igualmente en la escala tantas partes quantas varas ó pies tuviere *BE*, y desde el punto *b* como centro, y con un radio igual á dicho número de partes, se trazará un arco que corte el que se trazó con el radio *ae* en un punto *e*, que representará en el papel la posicion del punto *e* respecto de *ab*, semejante á la de *E* respecto de *AB*; porque en virtud de esta construccion el triángulo *aeb* tiene sus lados proporcionales á los del triángulo *AEB*: son, pues, semejantes los dos triángulos. Por el mismo método se determinarán los puntos *f*, *g*, *c*, *d*, que han de representar los puntos *F*, *G*, *C*, *D*.

Por lo que mira á los puntos *b*, *i*, *k*, que han de representar los puntos *H*, *I*, *K* que no se pudieron vér desde los puntos *A* y *B*: despues de determinados los puntos *e*, *f*, *g* conforme se ha dicho, las lineas *ef* y *fg* servirán de base, del mismo modo que sirvió *ab* para *c*, *d*, *e*, *f*, *g*: de suerte que tambien se reducirá la operacion á trazar desde los puntos *e* y *f* como centros, y con los radios *be*, *bf*, que contienen tantas partes de la escala quantas varas ó pies se hallaron por el cálculo, en *HE* y *HF*, dos


114
116
117
119

Digitized by Google

dos arcos cuya intersección *b* señalará el punto *H*; y asi de los demás. Con esto la figura trazada en el papel será semejante al terreno que se hubiere dibujado, pues se compondrá de igual número de triángulos que éste, semejantes á los del terreno, y colocados de un mismo modo; no faltará sino dibujar en cada uno de dichos puntos los objetos que se hubieren observado en ellos; y las partes intermedias, que no piden tanta escrupulosidad, se colocarán por los medios que luego declararémos. Fig.

Conviene saber que como este método sirve para determinar y fijar los puntos principales y fundamentales del plan, es mas del caso un grafómetro con anteojos de larga vista que con pínulas.

859 Si los objetos observados en las operaciones antecedentes no estuviesen todos en un mismo plano orizontal, será preciso, antes de formar el dibujo que los ha de representar, reducir los ángulos á lo que hubieran sido si todos los objetos hubieran estado en un mismo plano orizontal; cuya operacion se egecuta como se sigue.

Sean *A*, *B*, *C* tres puntos que estén á distintas alturas sobre el orizonte, y cuyas alturas respectivas sean *AD*, *BF*, *CE*: de suerte que sea *FDE* un plano orizontal. Ya se midió el ángulo *BAC*; pero como queremos referir los tres objetos al plano *FDE*, se finge que *B* está en *F*, *A* en *D*, y *C* en *E*, y se pide el ángulo *FDE*. 120.

En la estacion que se hiciese para medir el ángulo *BAC*, se medirán tambien los ángulos *BAD*, *CAC* que for-

Digitized by Google

Fig. forman los rayos visuales *AB*, *AC* con el plomo en *A*; y se practicará lo que digimos (819).

Sentado esto, supongámos que *AB* y *AC* prolongados, si fuese menester, encuentran el plano orizontal *FDE* en los puntos *G* y *J*: si en los triángulos *ADG*, *ADJ*, rectángulos en *D*, miramos *AD* como el radio de las tablas, serán *DG* y *DJ* las tangentes de los ángulos observados *GAD*, *JAD*; y serán *AG*, *AJ* sus secantes: luego si se toman en las tablas las secantes y las tangentes de los ángulos *GAD*, *JAD*, conocerémos: 1.° en el triángulo *GAJ*, los lados *GA*, y *AJ*, y el ángulo observado *JAG*. Será, pues, facil en virtud de lo dicho (677) calcular el lado *GJ*. 2.° en el triángulo *GDJ* conocerémos los lados *GD* y *DJ*, y el lado *GJ* calculado antes. Será, pues, facil despues de lo dicho (675) calcular el ángulo *GDJ*.

Lo propio se practicaría para reducir el ángulo observado en el punto *B*; y quando en un triángulo se hubieren reducido dos ángulos, será ocioso hacer otro cálculo para reducir el tercero, porque no valiendo mas que 180° los tres ángulos, será siempre facil sacar el tercero.

Reducidos por este medio los ángulos, se reducirán con facilidad las distancias, ó una de ellas, porque con una basta en cada triángulo. Con efecto si imaginamos la orizontal *BO*, en el triángulo *BAO* rectángulo en *O* conoceremos *BA* que se ha medido, el ángulo recto y el ángulo *BAO*: se sacará, pues, con facilidad *BO* ó *FD* (669).

Un

Un egemplo aclarará mejor quanto acabamos de decir. Supongamos que se ha observado el ángulo *BAC* de $62^\circ\ 37'$: el ángulo *BAD* de $88^\circ\ 5'$; y el ángulo *CAD* de $78^\circ\ 17'$. Fig.

Busco en las tablas las secantes y tangentes de los ángulos *BAD* y *CAD*, y hallo los valores siguientes omitiendo las tres últimas decimales:

Sec $88^\circ\ 5'$ ó *AG*	29,90
Sec $78^\circ\ 17'$ ó *AJ*	4,92
Tang $88^\circ\ 5'$ ó *DG*	29,88
Tang $78^\circ\ 17'$ ó *DJ*	4,82

Calcúlo en el triángulo *AGJ* (676) la semidiferencia de los ángulos *AGJ*, *AJG*, haciendo esta proporcion *AG* + *AJ* : *AG* — *AJ* :: tang $58^\circ\ 41'$ semisuma de dichos ángulos, es al quarto término $49^\circ\ 42'$, que será dicha semidiferencia; con lo que sacamos que vale el ángulo *AGJ* $8^\circ\ 59'$, y será (672) *GJ* de 27, 98.

En conociendo los tres lados *DG*, *DJ*, *GJ*, se hallará (675) que el ángulo *GDJ* es de $62^\circ\ 27'$.

860 No es indispensable la trigonometría para levantar un plan, sino quando los puntos principales del sitio cuyo mapa se quiere formar, están á distancias muy grandes los unos de los otros. Pero quando no son tan grandes las distancias, despues de medida una base, y observados los ángulos conforme hemos dicho (858), en lugar de calcular los triángulos, para formar por medio de

Fig. de los lados calculados y reducidos á la escala del plan, triángulos semejantes á los que se han observado en el terreno, basta formar dichos triángulos semejantes por medio de los ángulos observados conforme vamos á declarar.

Este método es menos exacto que el antecedente, porque como el semicírculo graduado ó, en general, el instrumento que sirve para formar en el papel ángulos iguales á los que se han observado en el terreno, no puede ser sino de un radio muy corto, no es posible formar dichos ángulos con la misma precision que se mide con la escala el valor de los lados que se determinan por el cálculo.

Pero como pocas veces se necesita una exactitud tan escrupulosa, y es mas breve el método de trasladar los ángulos al papel, debe mirarse como de un uso suficiente y bastante exacto. Consiste dicho método en tirar una linea
119. *ab* que contenga tantas partes de la escala del plan quan-
118. tas medidas caben en *AB*. Se hacen despues en los estremos *a*, *b* los ángulos *eab*, *eba*, *fab*, *fba* &c. iguales á los ángulos observados *EAB*, *EBA*, *FAB*, *FBA* &c. que forman con la base *AB* los objetos que se han podido ver desde los puntos *A* y *B*. Juntando despues los puntos *e*, *f* con la recta *ef*, se forman en los estremos de esta linea como base ángulos iguales á los que se han observado desde los dos puntos *E* y *F*; y asi prosiguiendo.

861. Despues de determinados los puntos fundamentales de un plan por un método riguroso, se determinan los menos importantes, y se egecuta el por menor del plan por

Digitized by Google

por otros métodos que bien que no sean tan exactos como el antecedente, son suficientes para los fines que en esta operacion se suele llevar. Sirven para este fin dos instrumentos sumamente socorridos, es á saber la Brújula y la Plancheta. Fig.

862 Es la *Brújula* un instrumento hecho de cobre, 121.
marfil, madera ú otra materia sólida, cuyo diámetro suele variar, habiendo brújulas desde dos hasta seis pulgadas de diámetro: su parte interior está hecha en forma de círculo en el qual van señalados dos diámetros que se cortan á ángulos rectos, para señalar con sus estremos los quatro puntos del mundo que llaman *cardinales*, y son Norte, Sur, Oriente y Poniente. En el estremo que ha de representar el norte, está pintada una flor de lis, desde la qual empieza la division del espresado círculo en 360°, yendo ácia el oriente, ó ácia la derecha estando en la parte de arriba la flor de lis. Para entender esto conviene considerar que el que mira la brújula de modo que esté la flor de lis arriba, está en la misma situacion que el que mira al cielo puesto de cara al norte; el qual tiene siempre el sur á las espaldas, el poniente á mano izquierda, y el oriente ó sol naciente á la derecha.

En el centro del espresado círculo se planta un ege de cobre ó acero muy puntiagudo, sobre el qual se coloca una aguja de acero imantada ó tocada á la piedra imán muy en equilibrio á fin de que pueda dar vueltas con suma facilidad. Tapa todo lo dicho un cristal redondo afian-

za-

Digitized by Google

Fig. zado en un rebajo hecho de intento al rededor del circulo, para impedir que el ayre menee la aguja.

Como penden la construccion y los usos de este instrumento de la propiedad que tiene el iman de volver sus polos ácia unos mismos puntos del mundo, tenemos por indispensable dar á conocer muy por mayor la piedra imán y su propiedad característica.

863 Es el *imán* una piedra dura que se halla en las minas de hierro, que tiene la virtud de atraer á otro imán ó al hierro en llegándole á tocar, ó teniéndole á corta distancia. Hay imanes azules, los hay blancos y de otros colores.

864 Tiene esta piedra por lo comun dos puntos opuestos llamados *polos* del imán donde es mucha su virtud atractiva, uno de los quales, estando libre el imán, mira constantemente ácia el norte, y el otro ácia el sur: por cuyo motivo se le llama al uno *polo boreal*, y al otro *polo meridional*. La linea que vá desde el un polo al otro se llama *meridiana*.

865 Estan constantemente en unos mismos puntos de la piedra sus dos polos, con tal que esté sola, y en la direccion magnética su ege. Pero si muchos imanes puestos desordenadamente unos inmediatos á otros se tocan por otros puntos que sus polos, llegan estos á mudar de lugar, y se reparan con el discurso del tiempo en otros puntos de la piedra.

866 Siempre que esté puesto un imán respecto de

otro,

otro, de modo que el polo austral de este mire al polo boreal del primero, se atraen mutuamente y se arriman hasta tocarse, con tal que no haya obstáculo que se lo estorve, y que no estén uno de otro á una distancia que exceda la esfera de actividad de su virtud atractiva. Fig.

867 No solo atrae el imán por qualquiera de sus polos indistintamente, sino que tambien pega su virtud atractiva pasando por uno de sus polos ó cerca de él una barra de hierro. El hierro imantado por este medio tiene las mismas virtudes que el iman, y atrae otro hierro.

868 Ya digimos antes que dirige la piedra imán el uno de sus polos ácia el Norte, y el otro ácia el Sur, cuya propiedad tiene tambien el hierro imantado, y en ella se funda la construccion de la brújula. Pero no se dirige exactamente la aguja imantada ácia el Norte, ni tampoco se aparta de este punto del mundo de una cantidad invariable aun en un mismo lugar. El número de grados de que se aparta del Norte la aguja, se llama su *declinacion*, sobre cuyo punto han andado muy solícitos los Filósofos para indagar de quántos grados era esta declinacion en varios paises, y si era ácia el Occidente ó ácia el Oriente; y de sus observaciones ha resultado que es muy variable esta declinacion, y que aun en un mismo lugar es en unos tiempos occidental, y en otros oriental. Bien se echa de ver que para determinar por medio de la brújula la verdadera situacion de los puntos que se han de señalar en un Mapa, es indispensable saber primero la cantidad de su variacion

en

Digitized by Google

Fig. en el pais donde se hace uso de este instrumento.

869 Para conseguirlo se mira en qué situacion está la aguja respecto de la linea meridional; y el ángulo que con ella forma en el plano orizontal, es la declinacion de la brújula.

870 Por lo que toca al modo de imantar las agujas, no hay cosa mas facil. Se han de pasar rozando por el polo de un buen imán, de manera que la punta que ha de mirar al Sur toque primero la piedra, y la toque la última la que ha de mirar al Norte.

122. Supongamos que sea *B* el un polo del imán, y *AC* una aguja, cuyo estremo *C* quiero que mire al Norte. Aplicaré la aguja en *B*, y teniéndola arrimada al iman, la haré correr ácia *A*, de modo que toda la mitad *DC* pase por el polo *B*.

871 Las agujas se han de hacer del mejor ácero que se pueda hallar: no han de tener mas de seis pulgadas de largo para que se les pegue bien la virtud magnética.

872 Suele haber una brújula en el grafómetro; y sirve para orientar los objetos, ó conocer, con diferencia de medio grado, su situacion respecto de los quatro puntos cardinales, ó respecto de la linea Nortesur con la qual forma constantemente la aguja el mismo ángulo en un mismo lugar, á lo menos en el discurso de un mismo año. Con esta mira se traza la linea Nortesur de la brújula paralela al diámetro del grafómetro; porque como la base comun de todos los triángulos observados es paralela

á

Digitized by Google

á dicho diámetro, basta mirar qué ángulo forma con la aguja imantada, y será facil averiguarlo dirigiendo la linea de *fé* de la alidada paralelamente á dicha aguja. Hecho esto, se dibuja en el plan una roseta de los rumbos de viento, donde ván señalados los principales con sus nombres, y colocados conforme se han observado en el terreno. Fig.

873 Sería la brújula un ínstrumento sumamente apreciable para levantar planos, porque con ella se levantan con suma facilidad, sea el que fuere el terreno, cubierto de maleza, irregular &c. si no tuviera algunos defectos de que pueden resultar equivocaciones muy sustanciales en esta especie de operaciones. 1.° Como no se pueden usar agujas muy largas, cogen muy poco espacio los grados de la graduacion en el instrumento, y no se pueden medir los ángulos con igual precision que con el grafómetro. 2.° Como todo plan despues de formado en borrador en el mismo sitio cuya figura ha de representar, se ha de poner en limpio, sirve tambien en esta segunda operacion la misma brújula ú otra para colocar en el plan las lineas, segun la inclinacion que se echó de ver tenian en el terreno respecto de la linea Nortesur. Pero es sumamente largo sacar esta copia con la brújula; y por razon de la virtud atractiva es preciso que esté el que la saca apartado 4 ó 5 pies de qualquiera cosa hecha de hierro, como son cerraduras de puertas, fallebas de balcones &c, y que la mesa en que trabaja no tenga clavo alguno. Es preciso que esté á la distancia

Digitized by Google

Fig. de 30 pies por lo menos de la barandilla de una escalera, reja &c. No se han de arrimar mas de seis pulgadas las puntas de un compas; y si hubiere otra brújula, será indispensable tenerla un pie distante de la que sirviese *.

3°.

* *En las noticias literarias que trahe el Diario de los Sabios del mes de Agosto de este año* (1771) *se lee la noticia siguiente en el artículo de París.* ,, El señor de Apres habia comunicado á la Real Academia de Marina al- ,, gunas de sus observaciones que le han manifestado que si se arriman la ,, una á la otra dos brújulas, no siguen la misma direccion respectiva ácia ,, la qual se dirigian estando á mayor distancia, y proponia que en las bi- ,, tácoras de los navios no hubiese en adelante mas de una aguja.

,, La Academia de Marina ha observado estas diferencias é indagado ,, su causa: se ha averiguado que consiste en que obra el iman con fuerza ,, distinta en las agujas: se han comparado dos brújulas muy desiguales, ,, y arrimandolas á un pie de distancia, la una declinaba 30°, y la otra no ,, declinaba mas que 21°: de donde se saca un medio facil de comparar ,, las agujas imantadas: la mas fuerte se resiste mas á su accion recíproca, ,, y se mantiene mas arrimada á la direccion que seguia quando estaba so- ,, la. Se siguen, pues, inconvenientes de mucha consecuencia de haber ,, dos agujas en las bitácoras de los navios, como se practíca general- ,, mente. Los errores que se originan de esta mala práctica pueden pro- ,, ducir los mas dañosos efectos. Movida del deseo de precaverlos la Aca- ,, demia ha publicado esperimentos tan importantes para la seguridad de ,, la navegacion, estampados en Brest en quatro planas de á quarto. *Journal des Savans pour l'année M.DCC.LXXI. Aout. A Paris* 1771.

De los esperimentos hechos por los Comisionados de la Academia resulta 1.° que no varía la direccion de dos agujas, arrimándolas la una á la otra, quando la linea que pasa por sus centros es la misma en que están las agujas, ó es perpendicular á las agujas: en apartándolas de esta situacion, crece la declinacion hasta que la linea que pasa por sus centros, forma un ángulo de 45° con las agujas ó con una linea que se las concibe tirada perpendicularmente. 2.° que su accion mutua las desvia mas de su primiti-

3.° Al tiempo de levantar el plan en el terreno, es importantísimo no acercarse á alguna mina de hierro; sin cuya precaucion saldrá forzosamente la aguja de su declinacion natural.

874 No obstante, como puede ofrecerse alguna ocasion en que no tenga el práctico otro instrumento de que valerse sino de la brújula, declararémos el modo de averiguar su declinacion, sin cuyo conocimiento es imposible saber quál es la situacion de un punto qualquiera del plan respecto de los puntos cardinales. El método que para la espresada averiguacion vamos á declarar no es tan exacto como otro que se funda en el conocimiento de la esfera; pero lo es bastante para los usos comunes.

Se trazará con jalones ó de otro modo una línea que se dirija ácia el Sol quando nace, y desde el mismo punto y en un mismo dia se trazará otra linea que se dirija ácia el Sol quando se pone: formarán estas dos lineas un ángulo que se dividirá en dos partes iguales (367) por una linea que será la linea que llaman *meridiana*: si se tira una perpendicular á la meridiana, sus estremos se dirigirán á los puntos que llaman Oriente y Poniente. Las dos

tiva direccion quando la una de las dos agujas está á Nordeste y la otra á Sudueste, la una á Sudeste y la otra á Norueste. 3.° que puestas las brújulas en una linea indefinita tirada desde Sudeste á Norueste, y estando á la distancia de 2 pies 3 pulgadas la una de la otra, declinaban 3 grados y medio; estando á 1 pies 6 pulgadas, declinaban 7 grados, y á la distancia de un pie declinaban 19 grados. *Gazette de Litterat. n.*73.1771.

Digitized by Google

Fig. dos lineas que forman el ángulo que la meridiana parte por el medio, han de tener por lo menos 30 ó 40 estadales de largo.

Trazada la meridiana que por el uno de sus estremos se dirige al Norte, será facil averiguar la declinacion de la brújula ó de su aguja. Se colocará el instrumento de modo que la base del uno de los lados de la caja paralelos á la linea Nortesur rase la linea meridiana hallada, en cuya situacion la linea Nortesur de la brújula será paralela á la meridiana; y estando así el instrumento, se mirará á qué grado corresponde la aguja; y restándole de 360, la resta espresará la declinacion de la brújula.

875 Por estos motivos solo sirve la brújula, segun hemos insinuado, para determinar los puntos menos esenciales de un plan, despues de determinados por el método antecedente los de mayor entidad.

876 Supongamos que se ofrezca trazar el curso de un rio, por egemplo: se plantarán piquetes en los recodos
123. mas reparables *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*: se colocará la brújula en el punto *A*: se mirará ácia *AB*: se contarán en la graduacion los grados que hubiere entre la linea *AB*, y la direccion actual de la aguja, y se medirá *AB*: se colocará despues la brújula en el punto *B*: se mirará ácia *BC*: se contarán tambien los grados que hubiese entre *BC* y *BN* que es la direccion de la aguja paralela á la primera direccion *AN*: se medirá *BC*, y se repetirán estas operaciones en cada recodo: despues de medidos por este me-

Digitized by Google

medio todos los ángulos y todas las distancias, se trazarán en el papel del modo siguiente. Fig.

Se escogerá á arbitrio el punto *a*, para que represente el punto *A*; y se tirará á arbitrio la linea *an*, para que represente la direccion de la aguja imantada. Se formará en el punto *a*, por medio del semicírculo graduado, el ángulo *nab* igual al ángulo observado *NAB*: y se le darán á *ab* tantas partes de la escala del plan, quantas medidas cupieren en *AB*. Desde el punto *b* se tirará *bn* paralela á *an*, y se hará el ángulo *nbc* igual al ángulo observado *NBC*, y se le darán á *bc* tantas partes de la escala quantas medidas cupieren en *BC*. Lo mismo se practicará respecto de todos los demás puntos. 124.

Lo que acabamos de declarar acerca de las sinuosidades de un rio, se aplica igualmente á las de un camino, á la cerca de un bosque &c.

877 Hay otro modo tambien de levantar planos, que es muy acomodado porque pide poco aparato; y al mismo tiempo que se observan los diferentes puntos cuya situacion se quiere determinar, se van señalando en el plan sin perderlos de vista. El instrumento que sirve para este fin se compone de una tabla *ABCD* de tres ó quatro pies 125. de largo, y de igual ancho con muy poca diferencia, que se coloca sobre un pie del mismo modo que el grafómetro. Sobre esta tabla se tiende una hoja de papel y se afianza por medio de un bastidor que coge todo el perímetro de la tabla. *LM* es una regla armada de pínulas en sus estremos,

Digitized by Google

Fig. cuyas pínulas están en una linea paralela al borde de la regla. En lugar de pínulas suele haber un anteojo de larga vista.

Quando se quiere hacer uso de este instrumento cuyo nombre es *Plancheta*, para trazar el plan de un terreno, se busca una base *mn*, como en las operaciones antecedentes; y plantado en *m* el pie del instrumento, se manda plantar un piquete en *n*: se aplica sobre el papel la regla *LM*, y colocándola de modo que se pueda vér por las dos pínulas el piquete plantado en *n*, se tira despues á lo largo de la regla una linea *EF*, dándola tantas partes de la escala del plan, quantas medidas cupiesen entre el punto *E* desde el qual se observa primero, y el punto *f* desde el qual se observará en la segunda estacion. Despues se la ha de dar vuelta á la regla al rededor del punto *E* hasta encontrar, mirando por las pínulas, alguno de los objetos *I*, *H*, *G*; y á medida que se encontrâre alguno, se tirará á lo largo de la regla una linea indefinita. Habiendo recorrido de este modo todos los objetos que se puedan vér desde el punto *m*, se llevará el instrumento á *n*, dejando un piquete en *m*: se harán en el punto *n* las mismas observaciones respecto de los objetos *I*, *H*, *G*, que se hubiesen hecho en la estacion antecedente. Las lineas *fi*, *fb*, *fg* que en este segundo caso ván, ó se concibe que ván hasta dichos objetos, encuentran las primeras en los puntos *g*, *b*, *i* que son la representacion de los objetos *G*, *H*, *I*.

878 Sirve principalmente la plancheta para trazar el

el por menor de un plan, despues de determinados por el método declarado antes (858), los puntos mas principales, ó para añadirle á un mapa levantado objetos que se hubiesen omitido. Fig.

Por egemplo, supongamos que estén determinados los objetos *A*, *B*, *C*, y representados en el mapa por los puntos *a*, *b*, *c*, y que sea *D* un punto cuya situacion no se sabe. Con la plancheta se determinará su situacion *d* del modo siguiente. Se plantará la plancheta en *D*, orientándola conforme diremos mas abajo: se dirigirá la alidada primero ácia la linea *Aa*, despues ácia *Bb*; y trazando una linea á lo largo de la alidada en cada operacion, su concurso *d* señalará en el mapa la situacion del punto *D* respecto de los objetos *A*, *B*, *C*. Se comprobará esta situacion con dirigir la alidada ácia *Ce*, y observar si esta linea prolongada pasa por el punto *d*. 126.

879 Lo que hemos dicho acerca de la plancheta basta para manifestar los usos para que puede servir. El que no supiese la Trigonometría podrá usarla quando tuviere que levantar por mayor el mapa de un pais en que no importe una suma exactitud.

Por lo demás, aunque dá la plancheta la situacion de los puntos que se han de señalar en el plan, la determina con tan poca precision, que es imposible egecutar con ella una operacion con la exactitud correspondiente para estar seguro del acierto. Son muchos los tropiezos á que está espuesto el que se vale de la plancheta, sea porque salen

Digitized by Google

Fig. ángulos muy agudos, y entónces el punto de la seccion se halla con diferencia de 2 ó 3 estadales; ó porque la plancheta ó el papel se apartan algunas lineas de la direccion de la base, y esto basta para que se halle una diferencia de muchos estadales en los puntos distantes. Finalmente el mal tiempo puede á cada instante cortar el hilo de la operacion; y la dificultad de continuarla despues es un inconveniente de grandísima consideracion, aun quando no se la agregáran los demás que ván espresados.

880 Se señala comunmente en el mapa la direccion de la aguja imantada; para cuyo fin sirve una brújula de
127. figura rectangular, que tiene de ancho como un tercio de lo que coge de largo. En medio del fondo está trazada una linea paralela al lado mas largo de la caja, y en esta linea está el ege que sostiene la aguja.

Para *señalar en el plan la direccion de la aguja*, se coloca la alidada de la plancheta en la linea que pasa por dos objetos señalados en el plan, y de modo que la representacion de dichos objetos en el plan esté en la misma linea. Se pone despues la brújula encima de la plancheta, y se la dá la vuelta hasta que se pare la aguja en la linea nortesur de la caja; esto es, en la linea del medio del fondo de la caja. Se traza finalmente una linea en la direccion del lado largo de la caja, cuya linea es la direccion de la aguja.

881 Recíprocamente quando está señalada en el mapa la direccion de la aguja, y se le quiere dár al mapa ó

á

á la plancheta la misma situacion que tienen los objetos en Fig.
el terreno, no hay mas que hacer sino procurar que convenga la linea nortesur del mapa con la linea nortesur de la brújula.

882 En vez de determinar la posicion de los objetos con dos estaciones, conforme hemos declarado respecto de la fig. 125, puede bastar sola una estacion; pero en este caso es preciso medir respecto de cada objeto la distancia á que está de la plancheta, y se señala en partes de la escala del plan á lo largo de la regla dirigida á dicho objeto.

De la Transformacion de las figuras.

883 Tenemos por superfluo prevenir que lo que vamos á decir debe solo entenderse de las figuras planas rectilineas, de las quales decimos que una es igual á otra, quando la superficie de cada una se compone de un mismo número de partes iguales, sea la que fuere la razon que pueda haber entre sus lados y sus ángulos.

884 Si ocurriere *transformar un triángulo isósceles ó equilátero* ABC *en otro triángulo rectángulo que le sea* 128.
igual; se bajará la perpendicular *AD* que, considerando *BC* como cuerda de un círculo cuyo centro esté en *A*, dividirá la *BC* en dos partes iguales en el punto *D*: hágase *DE* igual á *BC*, y tirando *AE*, estará hecha la operacion.

Su fundamento estriba en lo dicho (493), porque no puede menos de ser iguales los dos triángulos *ABC*, *AED*, pues son iguales sus bases, y tienen una misma altura.

Pa-

Digitized by Google

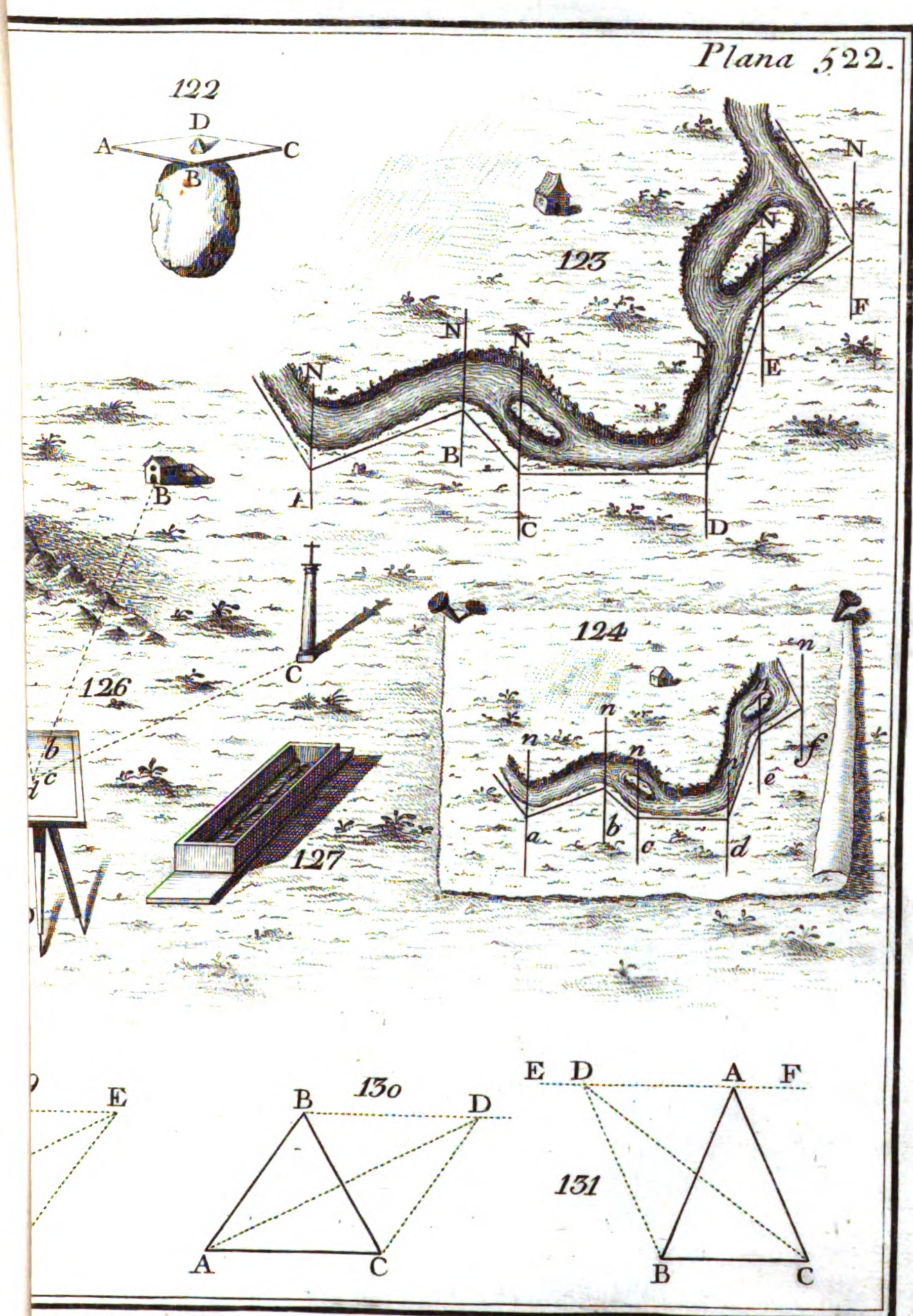
Fig. 885 Para *construir un triángulo obtusángulo escaleno*
129. *igual á un triángulo equilátero* ABC, se tirará por el vértice *B* la indefinita *BE* paralela á la base *AC*, la *CE* como se quisiere, con tal que forme con *AC* un ángulo obtuso en *C*; finalmente se tirará *AE*, y quedará construido el espresado triángulo.

Se funda en lo mismo que la antecedente.

886 El que quisiere *construir un triángulo isósceles*
130. *y obtusángulo igual al triángulo equilátero* ABC, habrá de tirar por el vértice *B* la *BD* paralela á la base *AC*, y desde el punto *C* como centro, con un radio igual á *CA* describirá un arco que corte en *D* la paralela *BD*, y tirando *CD* y *DA*, habrá salido del empeño.

887 Despues de lo dicho (885) se percibe lo
131. que se habria de egecutar para *construir un triángulo escaleno igual á un triángulo isósceles* ABC. Se echa de ver que por el vértice *A* se habria de tirar la *EF* paralela á la base *AC* &c.

888 Si se hubiera de *construir un triángulo igual á*
132. *un triángulo dado* ABC, *con la condicion de que cada uno de los tres lados del primero fuese mayor que cada uno de los tres lados del segundo*, se prolongaría ácia *E* y *D* la base *BC*, hasta que la recta *DE* fuese dupla de la misma base: por los puntos *D* y *E* se bajarían las perpendiculares *DF*, *EG* iguales á la mitad de la altura *AH* del triángulo dado: se tiraria *FG*, y el paralelogramo *DEFG* seria duplo del triángulo *ABC* (491). Por consiguiente tiran-



Digitized by Google

Digitized by Google

rando finalmente las lineas *FH*, *GH*, el triángulo *FHG* seria la mitad del espresado paralelogramo (426), y por lo mismo igual al triángulo *ABC*. Fig.

889 Quando ocurra *transformar un triángulo dado* BAC *en otro de una altura determinada*, serán dos los casos que se habrán de resolver. 133.

1.° Si el punto *D* donde ha de estar el vértice del triángulo que se pide, fuere uno de los del lado *AB* ó de su prolongacion, desde el punto *D* se tirará al ángulo opuesto *C* la recta *DC*, á la qual por el vértice *A* se tirará la paralela *AE* que encontrará en *E* la base *BC* prolongada si fuere menester. Tirando finalmente la *DE*, el triángulo *BDE* será igual al triángulo *BAC*, y tendrá su vértice en el punto señalado *D*.

Porque los dos triángulos *DAC*, *DEC* son iguales, pues tienen una misma base *DC*, y están entre unas mismas paralelas (493), por consiguiente si se añaden al triángulo *BDC* como en la fig. primera, ó si se restan de dicho triángulo como en la fig. segunda, los triángulos *BAC*, *BDE* que resultaren serán iguales.

890 2.° Si el punto *D* donde ha de estar el vértice del triángulo que se pide, no estubiere en el lado *BA* del triángulo *BAC* ni en su prolongacion: por el punto *B* de la base *BC*, y el punto *D* se tiraría la indefinita *BD* que encontraria en *O* la *AO* paralela á la base *BC*: desde el punto *O* se tirará la *OC* al otro estremo *C* de la base, y será el triángulo *BDE* igual al triángulo *ABC*. 134.

Por-

Fig. Porque el triángulo *BAC* y el triángulo *BOC* son iguales (493). Pero segun hemos visto en el primer caso, son tambien iguales los triángulos *BOC* y *BDE*, cuyo vértice *D* está en el lado *BO* ó en su prolongacion: luego el triángulo *BAC* es igual al triángulo *BDE*.

891 Si se hubiese de *transformar el triángulo* BAC *en otro* BDE *de igual valor, cuya altura fuese dada, y fuese tambien dado el ángulo* DBE; se tiraria la indefinita *BDO* tal que formase con *BC* el ángulo dado: se tomaria despues en la recta *BDO* el punto *D* que estuviese respecto de la base, á la misma altura que ha de tener el triángulo que se pide: lo demás como en la operacion antecedente.

892 Para *construir un triángulo igual á un quadrilá-*
135. *tero* ABCD, *con la condicion de que el vértice del triángulo haya de ser un punto qualquiera* F *del lado* AB *del quadrilátero*; se tirarán las *FC*, *FD*, á las quales se tirarán desde los puntos *A* y *B* las paralelas *AM*, *BN* que rematen en los puntos *M* y *N* del lado *DC* prolongado. Tirando finalmente las lineas *FM*, *FN*, resultará el triángulo *FMN* igual al quadrilátero propuesto.

Se funda esta operacion en los mismos principios que las que hemos propuesto poco ha (889 y 890).

136. 893 Si el quadrilátero *ABCD* fuese regular, despues de tirada la diagonal *AC*, se la tiraria la paralela *BN*, y tirando la *AN*, el triángulo *DAN* sería el que se busca.

894 Supongamos que se haya de *construir un trián-*

gu-

Digitized by Google

gulo igual á un quadrado, paralelogramo, rombo ó romboide ABCD; se hará *BE* igual á *CB*, se tirará *AE* &c. todo lo demás se percibe suficientemente. Fig. 137.

895 Quando ocurra *hacer un triángulo igual á un trapecio* ABCD, es menester considerar si el trapecio tiene ó no ángulos rectos. Si no tubiere ángulo recto ninguno, se dividirán en dos partes iguales los lados obliquos *AD*, *BC* en los puntos *G* y *H*, por los quales se tirarán perpendiculares á los lados opuestos prolongados si fuere menester. Se demostraria facilmente como antes, que el quadrilátero *ABCD* = *IFLK* = al triángulo *KFE*. 138.

Si el trapecio tubiere algunos ángulos rectos, divídase por el medio el lado *AB* en el punto *K*: tírese *GKF* paralela al lado *DC*, y prolónguese *CB* hasta *F*. Se probaria tambien facilmente que el trapecio *ABCD* es igual al quadrilátero *GFCD* que es igual al triángulo *DFE*. 139.

896 Para *transformar el quadrilátero* ABCF *en un triángulo igual*, se tirará la diagonal *CA*, y su paralela *BG*, y despues de tirada la linea *CG* se probaria con gran facilidad que el triángulo *FCG* es el que se pide. 140.

897 Si se hubiese de *construir un triángulo igual al quadrilátero* ABCD *que tiene el ángulo* A *entrante*: se tiraria la linea *DB*, su paralela *AE*, y despues la *DE*: sería el triángulo *CDE* igual al quadrilátero propuesto. 141.

898 Para *construir un triángulo igual á un polygono irregular* ABCDE: en la misma figura se vé patentemente la construccion y su demostracion despues de todo lo dicho. 142.

Si

Digitized by Google

Fig. 899 SI quisiéramos *transformar una figura rectilinea*
143. *qualquiera* ÁBCDE *en otra igual* ABFE *que tubiese un lado menos que la primera*, por los estremos *C* y *E* de los lados *DE*, *DC* del ángulo *D* tiraríamos la recta *EC*, y por el vértice del mismo ángulo *D* la tiraríamos la paralela *DF* que encontrase en *F* el lado *BC*, prolongado si fuere menester. Tirando finalmente la recta *EF*, el polygono *ABFE* será igual al polygono propuesto *ABCDE*, y tendrá un lado menos.

Porque los dos triángulos *EDC*, *EFC* tienen una misma base *EC*, y están entre unas mismas paralelas, por consiguiente son iguales: luego si á la misma figura *ABCE* se le añade qualquiera de estos dos triángulos, ó se le quita, resultará la figura *ABCDE* igual á la nueva *ABFE* que tiene un lado menos.

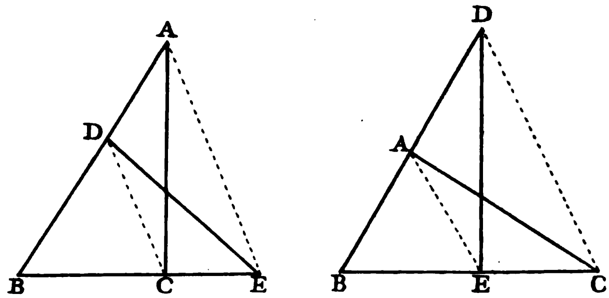
900 De aqui inferirémos que *no hay figura rectilínea ninguna que no se pueda transformar en triángulo.* Porque transformándola succesivamente en otras figuras tales que cada una tenga un lado menos que la antecedente, quedará por fin transformada en triángulo.

Supongamos que se haya de *transformar el polygono*
144. ABCDEF *en el triángulo* IAH *cuyo vértice* A *esté en la circunferencia del polygono, y la base sea el lado* CD *prolongado ácia ambos lados.*

1.° Desde el estremo *D* del lado *CD* se tirará la diagonal *DF* que le quitará al polygono el triángulo *DEF*: tírese á la *DF* la paralela *EG* que encontrará en *G* el lado

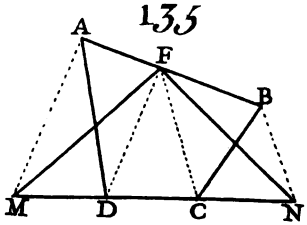
CD

Digitized by Google

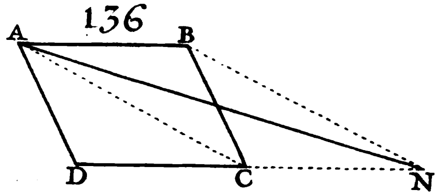


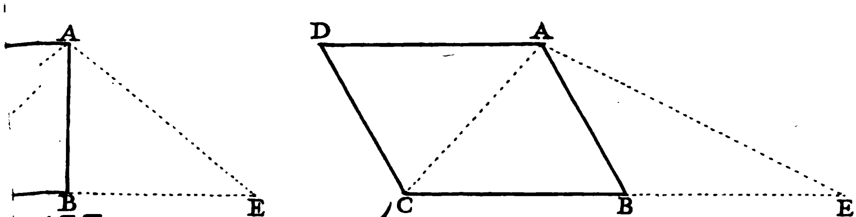
133

135



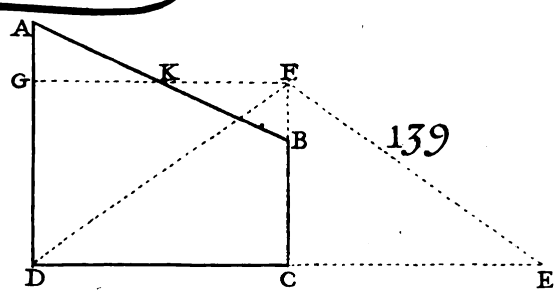
136





137

139



Digitized by Google

Digitized by Google

CD prolongado, y tírese por fin *FG*. Con esta operacion Fig.
quedará construido el polygono *ABCGF* igual al polygono propuesto, y tiene un lado menos (898).

2.° Reduzcamos ahora el polygono *ABCGF* á otro que le sea igual y tenga un lado menos. Para este fin tirarémos la recta *AG*, y su paralela *FH* que encontrará en *H* el lado *CD* prolongado. Tirarémos por fin *AH*, y resultará el polygono $ABCH = ABCGF = ABCDEF$.

3.° Como el lado *AH* del último polygono *ABCH* se puede tomar para lado del triángulo *IAH* que le ha de ser igual, su construccion se reduce á la reduccion de la parte *ABC*. Se tirará, pues, la recta *AC*, y su paralela *BI* que encontrarà en *I* la base *DC* prolongada, y tirando *AI*, quedará transformado el polygono propuesto *ABCDEF* en el triángulo *IAH*.

De la Division de las figuras.

901 Para *dividir un triángulo* ABC *en tres partes* 145.
iguales, por egemplo, por medio de lineas tiradas desde el ángulo opuesto á la base, se dividirá la base *AC* en tres partes iguales en los puntos *D* y *E*, y se tirarán *BD* y *BE* que dividirán el triángulo en tres triángulos iguales, por tener bases iguales y la misma altura.

902 Supongamos que representando el triángulo
ABC un campo, haya en *D* un pedazo de tierra mejor 146.
que la demás de la heredad, y se haya de partir entre dos, de modo que á cada uno le toque igual porcion del peda-

zo

Fig. zo bueno. Se dividirá la base *AC* en dos partes iguales en *E*, desde cuyo punto se tirarán las lineas *EB* y *ED*, y desde *B* la *BF* paralela á *DE*; y finalmente la *FD* que dividirá el triángulo en dos partes iguales *BDFA* y *DFC*.

Porque el triángulo *ABE* es la mitad del triángulo total *ABC*; y siendo por razon de las paralelas *BF* y *DE* el triángulo *BFD* igual al triángulo *BEF*, se sigue que el triángulo *OFE* que se ha quitado del triángulo *BEA*, es igual al triángulo *ODB* que se ha quitado del triángulo *EBC*; de lo que resulta que el trapezoide *BDFA* es igual al triángulo *FDC*.

903 Si quisiésemos *dividir en dos partes iguales el*
147. *triángulo* ABC *por lineas tiradas desde un punto dado* F, se dividirá la base *AC* en dos partes iguales en el punto *D*, se tirará *DF*, y á esta una paralela *BE*. Tirando despues las lineas *EF* y *FB*, la figura *ABFE* será igual á la *BFEC*.

Porque tirando *BD*, y considerando que el triángulo *BFE* es igual, por razon de las paralelas, al triángulo *BDE*, será por consiguiente lo que se ha quitado por una parte, igual á lo que se ha añadido por otra en los triángulos *ABD* y *DBC*.

148. 904 Para *dividir el triángulo* ABC *en dos partes iguales por una linea* DE *paralela á la base*, se dividirá por el medio el uno de los otros lados, *BC* por egemplo: se buscará una media proporcional entre todo el lado *BC* y su mitad *BF*; y suponiendo que *BE* sea igual á la media proporcional hallada, se tirará desde *E* la paralela *ED* á

la

la base *AC*, que dividirà el triángulo como se pide. Fig.

Siendo proporcionales las lineas *BC*, *BE*, *BF*, el quadrado formado sobre *BC* será al quadrado formado sobre *BE*, como la primera linea *BC* á la última *BF* (220). Pero como los triángulos semejantes tienen unos con otros la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos (509), el triángulo *BAC* será duplo del triángulo *BDE*, por ser el quadrado del lado *BC* duplo del quadrado del lado *BE*, á causa de ser *BC* dupla de *BF*.

905 Si se quisiese *dividir un triángulo en tres partes iguales por lineas paralelas tambien á la base*, se buscaría una media proporcional entre el uno de los lados y los dos tercios del mismo lado. Señalando esta media proporcional en el lado que se hubiere dividido, se tirará una paralela desde el estremo de esta linea á la base, y resultará un triángulo interior, que será los dos tercios del que se quiere dividir en tres: dividiendo despues en dos partes iguales como arriba (904) el triángulo que contiene los dos tercios del grande, estará dividido este en tres partes iguales.

906 Si ocurriese *dividir un triángulo* ABC *en tres partes iguales, por egemplo, por lineas tiradas desde el punto* D *dado en uno de sus lados*, dividiré el lado *AB* en tres partes iguales en *E* y *F*: tiraré despues la linea *DC*, á la qual se tirarán desde los puntos *E* y *F* las paralelas *EH* y *FG*, y desde *D* las *DG* y *DH* que dividirán el triángulo como se pide. 149.

Digitized by Google

Fig. Para probarlo, tírense *CE* y *CF*. Los dos triángulos *GFC*, *GFD* que tienen una misma base *GF* y están entre unas mismas paralelas, son iguales. Restando de cada uno el triángulo comun *GIF*, restará el triángulo *GIC* igual al triángulo *DIF*. Añádasele á cada uno el quadrilátero *BFIG*, resultará el triángulo *BGD* igual al triángulo *BCF*, esto es, á la tercera parte del triángulo propuesto (901).

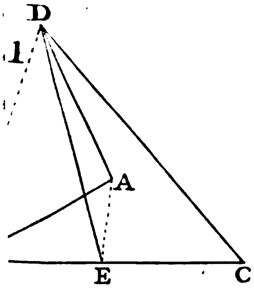
150. 907 *Si dentro de un triángulo* ABC *se nos pidiese un punto tal que las lineas tiradas desde dicho punto á los tres ángulos, dividiesen en tres partes iguales el triángulo*, hariamos *AF* igual al tercio de la base *AC*: tiraríamos desde *F* la *FE* paralela al lado *AB*, y la dividiriamos por el medio en *D*, que sería el punto que se pide. Las lineas *DB*, *DA*, *DC* tiradas desde *D* á los ángulos del triángulo le dividirán en tres partes iguales.

Con efecto si tiramos *BF*, resultará un triángulo *BAF* que será el tercio de la figura entera; y como el triángulo *BAF* es igual al triángulo *ADB*, por razon de las paralelas, se infiere que este triángulo será tambien el tercio de la figura: luego los dos triángulos *ADC*, *BDC* juntos componen los dos tercios del triángulo *ABC*. Pero los dos triángulos *ADC*, *BDC* son iguales; porque los dos triángulos *CDF*, *CDE*, y los otros dos *ADF*, *BDE* son iguales, cada uno al suyo, pues tienen iguales respectivamente sus bases y están entre las mismas paralelas: luego cada uno de los triángulos *ADC*, *BDC* es la tercera parte del triángulo propuesto.

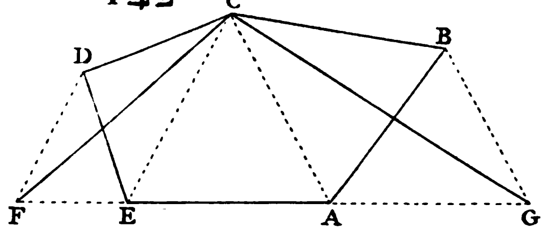
Si

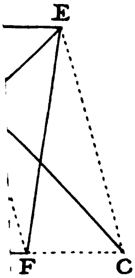
Digitized by Google

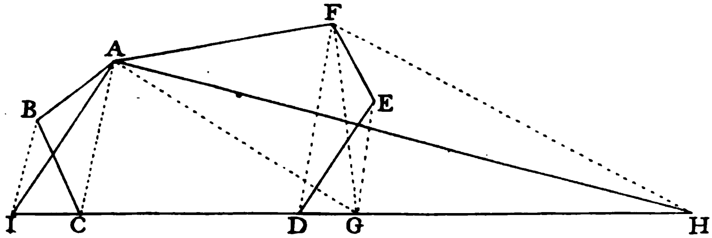
1



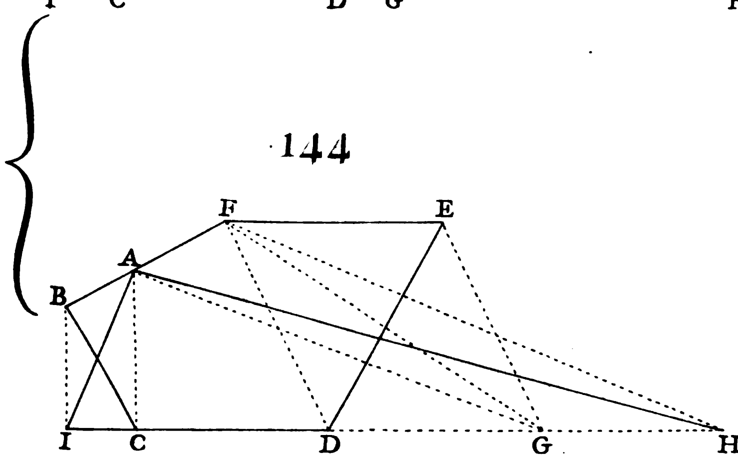
142

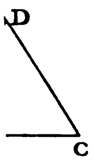


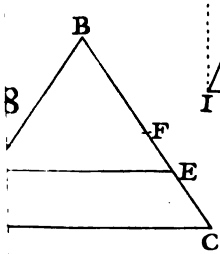




144







Digitized by Google

Digitized by Google

908 *Si se pidiese un punto* D *en el uno* AC *de los* Fig.
lados de un triángulo ABC, *desde el qual se le pueda divi-* 151.
dir en quantas partes iguales se quisiere, en quatro por egemplo, se tomará la quarta parte *AD* del lado *AC*, y el punto *D* será el que se pide.

Porque si se tira *BD*, el triángulo *ABD* será (901) la quarta parte del triángulo *ABC*; y si dividimos el triángulo restante *BDC* en tres partes iguales (901), estará dividido el triángulo propuesto *ABC* en quatro partes iguales por medio de las lineas *DB*, *DE*, *DF*.

909 Para *hallar dentro de la area de un triángulo* 152.
un punto desde el qual se le pueda dividir en las partes que se quisiere, en quatro por egemplo, tomarémos, como arriba, la quarta parte *AD* del lado *AC*, y tambien la quarta parte *AE* del lado *AB*: tirando desde los puntos *D* y *E* las lineas *DF* y *EG* paralelas respectivamente á los lados *AB* y *AC*, el punto *H* de la comun interseccion será el que se pide.

Porque tirando *HA*, *HB*, *HC*, qualquiera de los dos triángulos *AHB*, *AHC*, será (901 y 493) la quarta parte del triángulo propuesto *ABC*, y por consiguiente el triángulo *BHC* será su mitad: luego dividiendo este en dos partes por la linea *HI*, estará en *H* el punto que se busca.

910 Para *dividir un paralelogramo* ABCD *en un nú-* 153.
mero qualquiera de partes iguales, en seis por egemplo, por lineas tiradas desde el ángulo dado C, se tirará la diagonal

Digitized by Google

Fig. *AC*, que dividirá el paralelogramo en dos triángulos iguales (426), los que se podrán dividir (901) cada uno en tres, y estará hecho lo que se pide.

Si se omiten la diagonal *AC* y las lineas *CF* y *CH*, es claro que estará dividido el paralelogramo en tres partes iguales.

911 Quando ocurra *dividir en tres partes iguales un*
154. *paralelogramo* ABCD *por rectas tiradas desde un punto* E *dado en uno de sus lados*, se dividirá el lado *AB* en tres partes iguales en los puntos *F* y *G*, por los quales se tirarán las paralelas *FH*, *GI* al lado *AD*, las que se dividirán por el medio en *K* y *L*. Las rectas *EM*, *EN* tiradas por los puntos *E*, *K* y *E*, *L* dividirán en tres partes iguales el paralelogramo *ABCD*.

Porque siendo iguales (408) los dos triángulos *EFK*, *MHK*, si los añadimos cada uno separadamente al mismo pentágono *AFKMD*, el trapecio *AEMD* será igual al paralelogramo *AFHD*, esto es, á la tercera parte del mismo paralelogramo *ABCD*. Del mismo modo demostrarémos que el trapecio *BENC* es igual al paralelogramo *BCIG*, ó al tercio del paralelogramo *ABCD*. De donde resulta que el triángulo *MEN* vale tambien el tercio de *ABCD*.

Si el punto dado E *estuviese á los dos tercios de* AB,
155. *ó lo que es lo mismo, si* EB *fuese la tercera parte de* AB, dividiríamos el paralelogramo solo con tirar *EF* paralela al lado *AD*, y la diagonal *ED*.

Quan-

912 Quando alguno quisiere *dividir en dos partes iguales un trapecio* ABCD *por medio de una linea paralela á la base*, prolongará los dos lados *AB* y *DC* hasta que se encuentren en *G*; sobre el estremo *G* de *GA* levantará la perpendicular *GH* igual á *GB*: tirará *HA* sobre cuya linea como diámetro trazará una semicircunferencia que dividirá por el medio en *I*; y tirando *IH*, hará *GE* igual á *IH*: la linea *EF* tirada desde *E* paralelamente á la base *AD*, dividirá el trapecio en dos partes iguales. Fig. 156.

Porque siendo *HA* lado de un quadrado igual á la suma de los quadrados formados sobre *AG* y *GH*, y siendo *IH* lado de un quadrado que es la mitad del quadrado formado sobre *HA*, el quadrado formado sobre *IH* ó *GE* es medio arismético (181) entre los quadrados hechos sobre *GA* y *GB*. Y como los triángulos semejantes tienen unos con otros la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, se sigue que estando los quadrados de los lados *GB*, *GE*, *GA* en progresion arismética, los triángulos *GBC*, *GEF*, *GAD* están tambien en progresion arismética: por consiguiente es una misma la diferencia que hay entre ellos, ó el exceso que lleva *GEF* á *GBC*; esto es, el trapecio *BEFC* es igual al exceso que lleva *GAD* á *GEF*, esto es, á *EADF*: luego *BEFC* y *EADF* son iguales: luego &c.

913 Para *dividir un trapecio* ABCD *en dos partes iguales por una recta tirada desde uno de sus ángulos* A, se prolongará hasta *E* el lado *AB* adyacente al ángulo dado, 157.

Fig. y paralelo al lado opuesto *CD*, hasta que *AE* sea igual á *CD*: tírese *ED* prolongada hasta encontrar en *F* el otro lado *BC* tambien prolongado: divídase despues *BF* por el medio en *G*, y tírese *AG* que dividirá en dos partes iguales el trapecio *ABCD*.

Porque tirando *AF* y la diagonal *AC* que será paralela á *EF* é igual á *ED* (427), los dos triángulos *ACF*, *ACD* serán iguales entre sí: quitándoles el *triángulo* comun *ACI*, quedará el triángulo *ADI* igual al triángulo *ICF*. Añadiendo á cada uno de estos el trapecio *ABCI*, será el trapecio *ABCD* igual al triángulo *ABF*, cuya mitad es el triángulo *ABG*, por ser la base *BG* la mitad de la base *BF*; y así el triángulo *ABG* será la mitad del trapecio propuesto: luego &c.

158. 914 Quando se ofreciere *dividir en dos partes iguales un trapecio* ABCD *por una linea tirada desde un punto* H *del uno de sus lados*, se transformará dicho trapecio en el triángulo *ADF* (895), cuya base *AF* se dividirá por el medio en *E*, se tirará *DE*, y resultará el triángulo *ADE* que será la mitad del trapecio. Se tirará *DH*, y desde *E* la *GE* paralela á *DH*: finalmente se tirará *HG*, que dividirá en dos partes iguales el trapecio.

Porque los triángulos *EHO*, *ODG* son iguales por razon de las paralelas, y por consiguiente la figura *ADGH* vale la mitad del trapecio, yá que es igual al triángulo *ADE*.

915 Aunque sea operacion de poca importancia el di-

Digitized by Google

dividir un trapecio AC *en muchas partes iguales*, *en tres por egemplo*, declararémos no obstante cómo se egecuta, porque servirá como de introduccion para las que se siguen. Para este fin se empezará dividiendo los lados *DC* y *AB* en tres partes iguales, y se tirarán *GE* y *HF* que formarán las figuras iguales *AG*, *EH*, *FC*, por estar compuesta cada una de ellas de dos triángulos iguales. Fig. 159.

916 Si ocurriese *dividir un trapecio* ABCD *en quantas partes iguales se quisiere*, *en tres por egemplo*, *por lineas paralelas al uno de los lados* AD ó BC *que no son paralelos entre sí*, se dividirá el lado *BC* opuesto á *AD* (al qual suponemos que han de ser paralelas las lineas de division) en dos partes iguales en *E*, desde cuyo punto se tirará paralelamente á *AB* la linea *EF* que se dividirá en tres partes iguales en *G* y *H*. Si por estos puntos y por *E* se tiran *IK*, *LM*, *NO* paralelas á *AD*, estará dividido el trapecio propuesto en tres partes iguales. 160.

Por ser equiángulos los dos triángulos *BEN*, *ECO*, y ser un lado *EB* del uno igual á un lado *EC* del otro, serán iguales entre sí (408). Luego el trapecio *BCML* es igual al paralelogramo *MLNO*; y por consiguiente todo el trapecio *ABCD* es igual á todo el paralelogramo *ANOD*. Por ser cada paralelogramo *AK*, *IM*, *LO* la tercera parte del paralelogramo total *AO*, serán tambien el tercio del trapecio propuesto *ABCD*: luego &c.

917 Si se me propusiese *dividir el quadrilátero* ABCD *en dos partes iguales*, tiraría desde *B* la linea *BH* paralela 161.

Digitized by Google

Fig. á *AD*, y dividiría las líneas *BH* y *AD* en dos partes iguales en *G* y *F*: tiraria despues *GC* y *GF* que formarian la figura *CBAFGC* igual á la figura *CGFD*, cada una de las quales sería la mitad del quadrilátero; pues por la operación el trapecio *ABGF* es igual al trapecio *GFDH*, y el triángulo *BCG* es igual al triángulo *GCH*.

Pero serian mas regulares las dos partes del quadrilátero, si las dos lineas de division *GC* y *FG* no fueran sino una linea recta. Esto se conseguirá tirando *GE* paralela á *FC*, y desde *E* á *F* la *EF* que dividirá en dos partes iguales el quadrilátero, como es facil probarlo, por ser iguales los triángulos *FGC* y *FEC* que tienen una misma base *FC*, y están comprehendidos entre unas mismas paralelas.

162. 918 Si fuese menester *dividir un quadrilátero* ABCD *en dos partes iguales por una linea tirada desde uno de sus ángulos* B; tiraríamos las diagonales *AC* y *BD*, dividiendo la primera por el medio en *E*, desde cuyo punto se tiraría *EF* paralela á *BD*. Tirando *BF* desde el ángulo dado al punto *F*, la *BF* dividirá como se pide el quadrilátero.

Porque tirando las lineas *EB* y *ED*, será el triángulo *ADE* igual al triángulo *CDE*, y el triángulo *ABE* igual al triángulo *CBE*. Luego dividen las lineas *EB* y *ED* en dos partes iguales el quadrilátero; y como los triángulos *BED*, *BFD* comprehendidos entre las paralelas *EF* y *BD* dán *EBO* igual á *OFD*, se sigue que la linea *BF* di-

Digitized by Google

divide el quadrilátero en dos partes iguales. Fig.

919 Para *dividir en dos partes iguales un quadrilátero* ADCB *desde un punto* E *dado en uno de sus lados*, se tirarán las rectas *DE*, *DB*, y desde *C* la *CF* paralela á la diagonal *DB*; cuya *CF* encontrará en *F* el lado *AB* prolongado. La recta *DF* formará (896) el triángulo *ADF* igual al quadrilátero propuesto *ABCD*. Dividase la base *AF* por el medio en *G* y tírese *DG*. El triángulo *ADG* será la mitad del triángulo *ADF* ó del quadrilátero *ABCD*. Finalmente desde *G* tírese *GH* paralela á *DE*, y tírese *EH* que dividirá en dos partes iguales el quadrilátero. 163.

Por ser paralelas las rectas *DE*, *GH*, los dos triángulos *GHD*, *GHE* son iguales entre sí: quitándoles el triángulo comun *GHI*, el triángulo restante *DHI* será igual al restante *GIE*. Añadiendo uno y otro separadamente al mismo quadrilátero *AEID*, resultará el quadrilátero *AEHD* igual al triángulo *ADG*, y por consiguiente á la mitad del total *ABCD*: luego &c.

920 Quando ocurra *dividir un quadrilátero* ABCD *en dos partes iguales por una linea paralela á uno* AB *de sus lados*, se prolongarán *BC* y *AD* hasta encontrarse en *G*, y se tirará *CF* paralela á la diagonal *BD*: se dividirá despues la base *AF* del triángulo *ABF* por el medio en *H*, y se buscará una media proporcional entre *AG* y *HG*, que será *IG* por egemplo: si desde *I* se tira *IK* paralela á *AB*, estará dividido el quadrilátero en dos partes iguales *ABKI* y *IKCD*. 164.

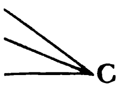
Sien-

Fig. Siendo semejantes los triángulos *ABG* y *IKG* (459), y estando en la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, serán entre sí como las lineas *AG* y *HG* (220). Pero como los triángulos *ABG* y *HBG* tienen la misma altura, estarán (508) en la razon de sus bases, y por consiguiente en la misma razon que las lineas *AG* y *HG*: luego el triángulo *IKG* es igual al triángulo *HBG*. Esto supuesto, si de una y otra parte se quita la figura *HOKG* comun á ambos triángulos, quedará el triángulo *OIH* igual al triángulo *OBK*; pero como el triángulo *BAH* es igual á la mitad del quadrilátero, se sigue que la figura *AIKB* vale tambien la mitad del quadrilátero que está dividido por *IK* en dos partes iguales.

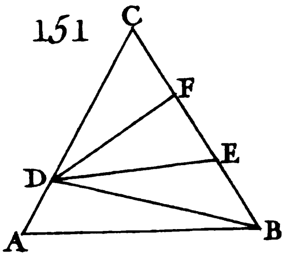
165. 921 Para *dividir un quadrilátero* ABCD *en tres partes iguales por dos lineas tiradas desde dos puntos* E *y* F *dados en uno de sus lados*; se tirará desde el ángulo opuesto *C*, y paralelamente á la diagonal *DB*, la *CG* que encuentra en *G* el lado *AB* prolongado: y tirando desde *G* hasta el ángulo opuesto la recta *DG*, resultará un triángulo igual al quadrilátero (896). Por lo que si se divide la base *AG* en tres partes iguales en *H* y *I*, y se tiran *DH* y *DI*, qualquiera de los tres triángulos *ADH*, *HDI*, *IDG* valdrá el tercio del triángulo *ADG*, ó del quadrilátero propuesto *ABCD*. Finalmente desde *H* se tirará *HK* paralela á la *DE*, y desde *I* la *IL* paralela á la *DF*: tiránse tambien *EK* y *FL* que dividirán en tres partes iguales el quadrilátero propuesto.

Por-

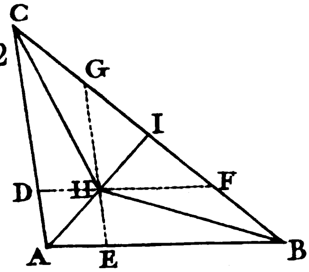
Digitized by Google



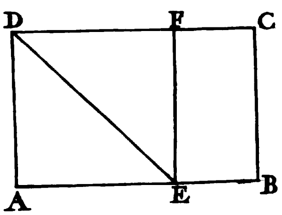
151



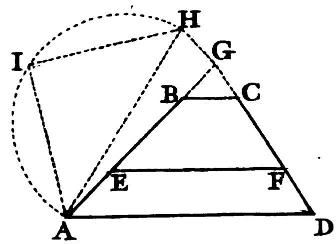
152

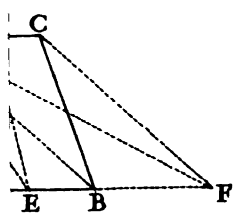


155

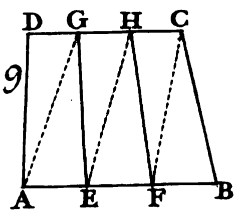


156

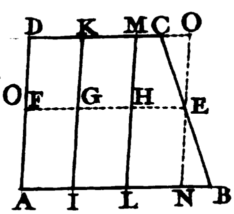




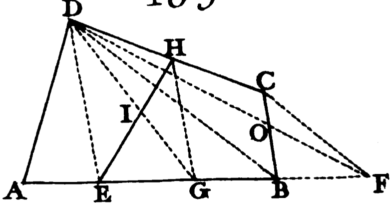
159



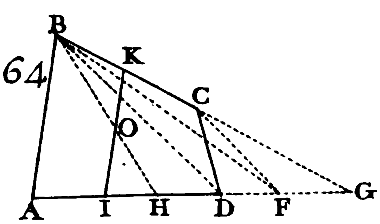
160



163



164



Digitized by Google

Digitized by Google

Porque yá que son paralelas por construccion las dos rectas *DE*, *HK*, serán iguales entre sí los dos triángulos *HDK*, *HEK*. Por lo que si de ambos se quita el triángulo comun *HOK*, quedará el triángulo *DOK* igual al triángulo *EOH*. Añadiéndole á cada uno el quadrilátero *AEOD*; resultará el quadrilátero *AEKD* igual al triángulo *ADH*, esto es, al tercio del quadrilátero *ABCD*. Del mismo modo demostrarémos que el quadrilátero *AFLD* es igual al triángulo *ADI*, quiero decir, á los dos tercios del quadrilátero *ABCD*; de donde se infiere con facilidad que qualquiera de los dos quadriláteros *EKLF*, *FLCB* es la tercera parte del propuesto *ABCD*. Fig.

922 Propongámonos *dividir un polygono* ABCDE *en tres partes iguales por lineas tiradas desde uno de sus ángulos* D. Empezarémos transformando dicho polygono en un triángulo *FDG* (898), cuya base *FG* se dividirá en tres partes iguales en *H* y *I*, y tirando *DH* y *DI* estará dividido el polygono segun se pide. 166.

Porque cada uno de los triángulos *FDH*, *HDI*, *IDG* vale el tercio del triángulo *FDG*, y por consiguiente el tercio del polygono dado *ABCDE*.

923 Si fuese menester *dividir un polygono* ABCDE *en muchas partes iguales, en quatro por egemplo, por rectas tiradas desde el ángulo dado* D, se transformará dicho polygono en un triángulo *FDG* (898), y se dividirá su base *FG* en quatro partes iguales en *H*, *I*, *K*. Tirando *DH*, *DI*, *DK*, los quatro triángulos *FDH*, *HDI*, *IDK*, 167.

KDG

Digitized by Google

Fig. *KDG* serán cada uno la quarta parte del triángulo *FDG* (901), y por consiguiente del pentágono *ABCDE*. Pero por quanto el punto *H* cae fuera del lado *AB*, se reducirá el triángulo *HDI* al quadrilátero *ALDI*, lo que se conseguirá facilmente tirando *HL* paralela á *AD*. La demostracion es muy facil en virtud de lo dicho hasta aqui.

De las Superficies.

Acerca de esta especie de estension no se nos ofrece otra cosa que declarar sino el método para medirla, pues llevamos dicho en los Elementos de Geometría quasi lo mas que sobre esto hay que decir: enseñamos alli mismo el modo de medir las superficies, previniendo que para egecutarlo se hace uso de un quadrado, como de una vara quadrada, de un pie quadrado &c. Nos ceñirémos, pues, á dar alguna aplicacion de lo dicho á la medida de las heredades.

168. 924 Si ocurriese *medir un terreno* ABCDF, *por cuyo interior suponemos que se puede transitar*, se levantará su plan *abcdf*, y se medirán despues todos los triángulos que le componen: la suma de las superficies de estos triángulos dará la del terreno.

925 Pero *si el terreno fuese tal que solo se pudiera reconocer por la parte de afuera*, se harán plantar unos piquetes grandes en *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, y se medirán los ángulos *A*, *B*, *C* &c. y los lados que los comprehenden. Se hará el ángulo *a* igual al ángulo *A*: se tomará *ab* de tantas partes de la escala quantas varas contiene *AB*: se hará el ángulo *b*

igual

Digitized by Google

igual á *B*, y se tomará *bc* de tantas partes de la escala quantas varas contenga *BC*, y asi prosiguiendo se trazará la figura *abcdf*, que se medirá conforme se dixo (501). Fig.

Por este método se podrá medir la superficie de un pais pantanoso, de una laguna, de un bosque, y la superficie orizontal que ocupa la base de una montaña al rededor de la qual se puede andar. Si su contorno fuera una linea curva, se plantarian piquetes de trecho á trecho de modo que se pudiese tomar, sin error sustancial, por linea recta la parte del contorno comprehendida entre dos piquetes.

926 *Si fuese inaccesible la superficie de un terreno* ABCD *que se nos propone medir*, levantarémos (877) 169.
su plan: se medirá facilmente el plan *abcd*, reduciendo dicha figura á triángulos (que aqui se conseguirá solo con tirar una linea desde *b* á *d*): midiendo cada triángulo separadamente estará concluida la operacion.

927 Quando ocurriese *medir un terreno* FEHGF *terminado por una linea curva*, se tirará la linea *AD* tangente á dicha curva. Se tirará desde *F* una perpendicular *BA* á esta linea. Desde el punto *G* mas distante de la linea *AD* se tirará *CB* perpendicular á *BA*; y por el punto *H* el mas distante de *BA*, se tirará *CD* perpendicular á *BC*, y estará comprehendido el terreno dado en un rectángulo *ABCD*, cuya superficie se hallará multiplicando la base por la altura. Hecho esto, se tirará *ba* perpendicular á *BC*, y se medirá el triángulo *Gab*, suponiendo que *aG* es sensiblemente una linea recta: se medirá el trapecio *bBFa* (500), 170.

y

Fig. y los triángulos *FAE*, *EDH*, *HCG*, y restando todas estas superficies de la del rectángulo, el residuo dará la area del terreno propuesto. Si la linea *aG* ó *aF* discrepare mucho de una linea recta, se tiraría otra ú otras muchas perpendiculares á *BC*, y resultaría un número mayor de trapecios que se medirian sin dificultad alguna.

928 Quando se haya de *sacar la superficie orizontal de un terreno en cuesta, que supondrémos ser un rectán-*
171. *gulo* ABCD: se imaginarán las lineas orizontales *AP*, *DM* y las verticales *BP*, *CM* tiradas desde los ángulos *B* y *C*, á dichas lineas. La superficie orizontal que se busca será igual al rectángulo *APMD*, cuya superficie es igual al producto de *AD* por la linea *AP*; y como suponemos que se puede medir *AD*, todo el trabajo está en hallar el valor de *AP*. Para cuyo fin se podrá hacer uso de una es-
172. cuadra *ABC*, cuyo brazo *BC* sea de un estadal por egemplo, y el otro brazo *AB* tenga un plomo *BM* mas ó menos largo, conforme se quisiere. Se aplicará el punto *C* sobre la cuesta *CH*, por egemplo, que se quiere medir: se dejará caer el plomo de modo que sin salir el hilo de la muesca *BA*, su estremo *M* cayga sobre *CH*, y será *BC* igual á *MS*, longitud orizontal correspondiente á la parte *CM* de la linea *CH*: se aplicará despues el instrumento en el punto *M*, y se hará lo mismo yendo ácia *H*: y si se encontrase 20 veces la longitud *BC*, se inferirá que la linea orizontal correspondiente es de 20 estadales ó 200 pies.

Fún-

Digitized by Google

Fúndase esta práctica en que siendo siempre perpendicular al orizonte el plomo, es evidente que el brazo *BC* será orizontal mientras se mantuviere el plomo en la muesca *AB*. Supóngase, pues, ahora que midiendo de este modo la linea *AP*, se hallen 10 estadales, y que la linea *AD* contenga 25, el rectángulo propuesto será de 250 estadales quadrados. Fig. 171.

929 Si se quisiese *medir el trapecio* ABCD *que suponemos en cuesta*, se tiraria por un punto *a* de la base mayor una perpendicular á las bases paralelas: se medirian las dos bases, y multiplicando la mitad de su suma por la orizontal correspondiente á la linea *ba*, sería el producto la superficie orizontal que se busca. 169.

Esto se funda en que la altura del trapecio orizontal que corresponde al trapecio propuesto, es igual á la linea orizontal correspondiente á *ba*; pero la superficie del trapecio es igual (500) al producto de su altura por la semisuma de sus bases paralelas: luego &c.

930 Para *medir la superficie orizontal de un triángulo en cuesta* ABC, se bajará desde el vértice del ángulo *B*, la perpendicular *BP* á la base *AC* que se supone orizontal ó paralela al orizonte: se medirá la longitud orizontal correspondiente á la linea *BP*; y el producto de esta orizontal por la mitad de la base *AC* dará la superficie que se pide. 173.

Pero si la linea *AC* estuviese en cuesta desde la derecha ácia la izquierda, por egemplo, al mismo tiempo que

BP

Digitized by Google

Fig. *BP* está en cuesta de arriba abajo, se medirá con la escuadra la orizontal *AH* correspondiente á *AC*, y se considerará *AH* como base del triángulo. Del mismo modo si
171. en el rectángulo *ABCD*, no solo los lados *AB*, *CD* estuviesen en cuesta de arriba abajo, sino que tambien los lados *BC*, *AD* tuviesen pendiente de la izquierda á la derecha, se mediría la orizontal *AI* correspondiente á la base *AD*, y se tomaría *AI* por base, y *AP* por altura del rectángulo propuesto; multiplicando estas dos lineas una por otra, sacariamos la superficie orizontal del triángulo.

931 Es de notar 1.° que si el terreno tuviese pendientes desiguales, se le reduciria á triangulos, de suerte que la cuesta de cada triángulo fuese uniforme, y se practicaría con ellos lo que acabamos de decir. Tambien se obraría como si se quisiese levantar el mapa de dicho terreno, y despues se mediria, por medio de una escala, la figura del terreno trazada en el papel.

2.° Quando se trata de medir un terreno ó levantar su plan, se pide comunmente su superficie orizontal. El que compra un terreno lleva por lo comun la mira de labrar una casa, plantar árboles, ó sembrarle.

Los árboles y las plantas en general crecen perpendicularmente al orizonte; las casas se construyen tambien perpendiculares al orizonte; y el número de árboles que se pueden plantar, la cantidad de grano que se puede coger, y la estension de los edificios corresponden á la superficie orizontal. Y así, sea la que fuere la superficie aparente del ter-

terreno, solo se debe atender á la superficie orizontal: luego si esta no es mas que la mitad de la superficie total medida por la cuesta, se ha de pagar el terreno la mitad menos de lo que se compraría si fuese orizontal la superficie de la cuesta; y aun se puede dar algo menos de la mitad, porque un terreno en cuesta es menos acomodado que un terreno orizontal. Fig.

Si representa *ABC* una montaña cuya base *AC* sea orizontal, no podrán plantar en el pendiente *AB* de la montaña mas árboles que en la superficie orizontal correspondiente *AP*; porque si imaginamos los árboles prolongados, es patente que su distancia apreciada orizontalmente, no puede ser mayor en la cuesta que en la llanura. 173.

De los Sólidos.

932. Acerca de los sólidos tampoco ocurre saber otra cosa mas que el modo de hallar su solidéz; pero quanto hay que decir en este particular está yá declarado en los Elementos de Geometría, donde hemos dado métodos muy seguros para medir las diferentes especies de sólidos que ocurren con mas frecuencia.

933. Aquí nos toca manifestar por qué camino se puede hallar la capacidad de los vasos que contienen algun líquido, como vino, aceyte &c. cuya operacion suele ofrecerse muy á menudo.

Para cuyo fin considerarémos estos vasos como compuestos las mas veces de dos trozos de cono *QRXV*, 174.

Digitized by Google

Fig. $STXV$ que tienen comun la base XV. Y como buscar la cabida de una cuba, por egemplo, ó de otro vaso qualquiera, es indagar quántas veces cabe en ella una medida determinada, como un quartillo, una azumbre &c. conviene reducir esta á una figura regular para la mayor facilidad y exactitud de la operacion. Si los vasos que se han de medir tuvieran quadrada su base, reduciríamos á cubo la medida primordial; pero como son cilindros dichos vasos, ó, con muy corta diferencia cónicos, mejor es medírlos con medida cilíndrica, y reducir por lo mismo á cilindro la medida de la azumbre &c.

934 Hágase, pues, con toda prolijidad un cilindro
175. AB de estaño ú de hoja de lata, y sépase quánto coge el
diámetro de la base. Echensele una, dos ó tres azumbres, por egemplo, &c. de líquido que ocupe la parte CD, y nótese la altura AD que cogiere en el cilindro.

Cójase una vara, y señálense en la una de sus caras
176. EF divisiones iguales á la altura AD que coge el líquido
en el cilindro. La otra cara GH de la misma vara se ha de dividir segun digimos antes (724) que se señalan las divisiones de la linea de los planos. A cuyo fin sea GK perpendicular á GH, y sean GK, $G1$ iguales al diámetro AC, en cuyo supuesto será $K1$ el diámetro de un círculo duplo de AC, pues se han los círculos como los quadrados de sus diámetros (512).

Hágase $G2$ igual á $K1$, será $K2$ el diámetro de un círculo triplo de la base AC; haciendo $G3$ igual á $K2$,

Y,

y así prosiguiendo, se sacarán los diámetros de todos los Fig.
círculos, que tendrán una razon determinada con el diámetro *AC*.

935 Si se buscase el diámetro de un círculo la mitad menor que *AC*, se dividirian los lados *GK*, *G* 1 por el medio en *O* y *N*: sería *ON* el diámetro del círculo que se pide. Porque un círculo cuyo diámetro es *OG* ó *GN*, es la quarta parte del círculo *AC*, á cuya suma es igual el círculo cuyo diámetro es *ON*.

936 Por medio de la vara dividida conforme hemos declarado, se puede medir la capacidad de un vaso cilíndrico qualquiera *LMNO*. Se medirá primero la base *MN*, 177.
y supongamos que sea *MN* igual á *G* 3: el círculo cuyo diámetro fuere *MN*, será triplo del círculo *AC*; y por 175.
consiguiente si el vaso propuesto se llenase hasta *P*, en el supuesto de ser *MP* igual á *AD*, en la parte *MP* del vaso cabrán tres veces mas líquido que en *AD*. Mídase despues la altura *LM* con la cara de la vara que señala las alturas; y suponiendo que coja cinco divisiones, el producto 15 de la base 3 por la altura 5 manifestará que caben en el vaso *MO* quince azumbres.

937 Este método sería exacto si fuesen iguales las dos bases de los vasos que ocurre medir; pero como son por la mayor parte ó cónicos ó compuestos de dos conos truncados, como los toneles &c. sería preciso para hacer la operacion con todo el rigor posible concluir el cono, medir los dos que resultaren, y restar del mayor el menor.

Mm 2 Se

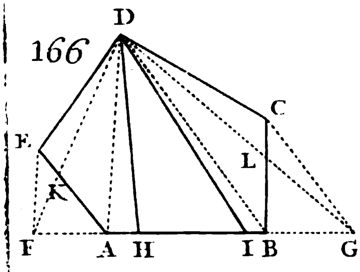
Digitized by Google

Fig. Se valen no obstante los Prácticos para medír un cono truncado de otro artificio menos complicado. Buscan la
178. area de la base *ABCD*, y la de la base *MNOP*: toman, despues de sumadas, la mitad de su suma para sacar una base intermedia que multiplican por la altura del cono, y sacan asi su cabida.

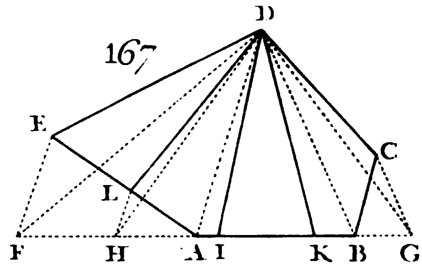
Pero esta práctica, aunque muy seguida, dá un resultado errado quando hay mucha diferencia entre las dos ba-
179. ses. Sea *ABC* un cono quasi perfecto, de modo que siendo el círculo en *A* muy pequeño, sea mucha la diferencia entre las dos bases del cono truncado. En virtud de la práctica espresada se buscará una base media entre la base *A* y la base *BC*, que será con muy corta diferencia la mitad del círculo *BC*, ó algo mayor. Si se multiplica esta base media por la altura del cono, espresará el producto un cilindro que vendrá á ser la mitad del cilindro *CD*. Pero el cono *ABC* no es mas que el tercio (604) del cilindro *BD*: luego puede dár en algunas ocasiones la práctica espresada una medida muy errada.

Infiérese de lo dicho que podrá seguirse en los casos mas comunes en que es muy corta la diferencia entre las dos bases del vaso, cuya cabida se desea averiguar.

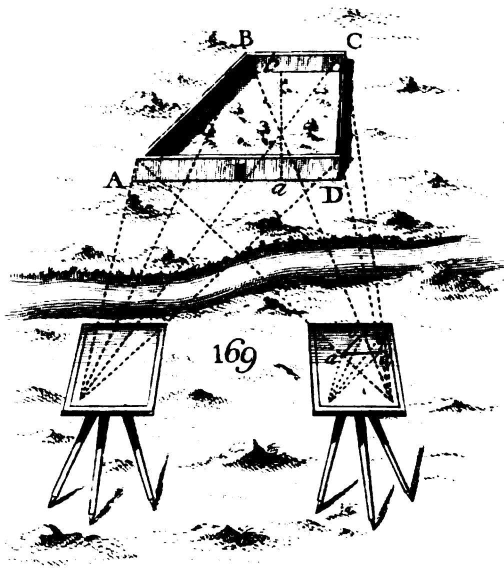
938 En virtud de todo lo declarado hasta aquí se
174. podrá hallar la cabida de un tonel *QRTS*. 1.° Se medirá con la vara de que hemos hablado (934) el diámetro *VX*; y como la base *QR* es algo menor, se medirán el diámetro *QR* y la base; se tomará otra media entre las dos:



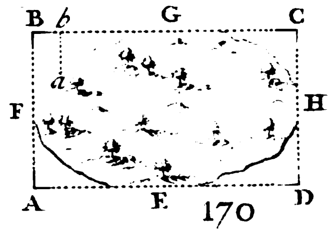
166



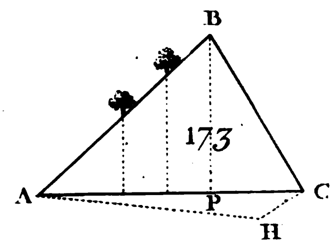
167



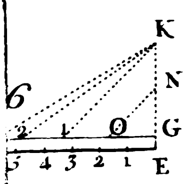
169



170

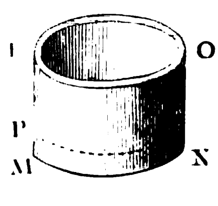


173

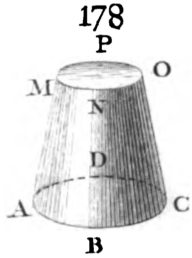


6

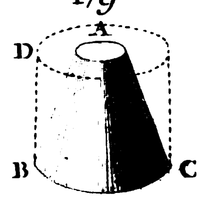
177



178



179



Digitized by Google

Digitized by Google

dos : sí fuese la primera , esto es, *VX* igual á la linea *G* 3 Fig.
y *QR* igual á *G* 2 , la verdadera base será la mitad de la 176.
suma de estos dos números , que es $2\frac{1}{2}$. 2.° Mídase la longitud *YZ* , que supongo igual á la parte *E* 8 de la cara cuyas divisiones representan las alturas de los cilindros: multiplíquese $2\frac{1}{2}$ por 8 ,y el producto 20 espresará que caben en el tonel *QRTS* 20 azumbres.

Porque podemos considerar un tonel como un cilindro cuya base sea igual á la base media entre el fondo y el vientre del tonel : luego &c.

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google